| الأعداد المركبة | سلسلة رقم : | القسم :3ع ت | السنة 2015/2016: |
|---|---|---|---|

مجموعة الأعداد المركبة هي : $\mathbb{C}=\{z=x+iy \,/\, x\in\Re ; y\in\Re \,; i^2=-1\}$

## الكتابة الجبرية لعدد مركب :

ليكن $z=x+iy$ عدد مركب حيث : $x\in\Re ; y\in\Re$

- ✓ $x+iy$ تسمى الكتابة الجبرية للعدد المركب $z$
- ✓ العدد $x$ يسمى الجزء الحقيقي للعدد المركب $z$ و رمز له بالرمز : $R\mathrm{e}(z)$
- ✓ العدد $y$ يسمى الجزء التخلي للعدد المركب $z$ و رمز له بالرمز : $\mathrm{Im}(z)$

## حالتان خاصتان:

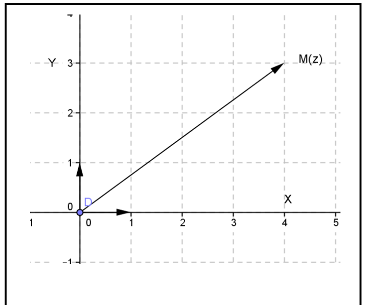
- ✓ إذا كان $\mathrm{Im}(z)=0$ فان هو عدد حقيقي $z$
- ✓ إذا كان $R\mathrm{e}(z)=0$ و $\mathrm{Im}(z)\neq 0$ فان $z$ يسمى عددا تخيلي ثرفا

## تساوي عددين مركبين:

ليكن $z$ و $z'$ عددين مركبين
إذا كان $\mathrm{Im}(z)=\mathrm{Im}(z')$ و $\mathrm{Im}(z)=\mathrm{Im}(z')$ فان $z'=z$

## تمثيل لعدد مركب :

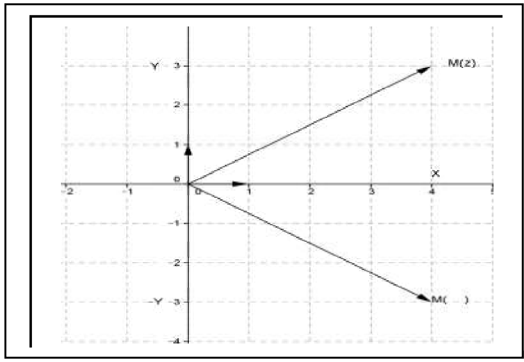
ليكن المستوي المركب منسوبا إلى معلم متعامد متجانس : $(o;\vec{i};\vec{j})$




لبكن $z=x+iy$ عددا مركب حيث : : $x\in\Re ; y\in\Re$
نرفق العدد المركب $z$ بالنقطة $M(x;y)$ .

- ✓ العدد $z$ يسمى لحقت النقطة $M$
- ✓ النقطة $M$ تسمى صورة العدد $z$ و نكتب $M(z)$
- ✓ العدد $z$ يسمى كذالك لاحقة الشعاع $\overrightarrow{OM}$

## مرفق عدد مركب:




ليكن $z=x+iy$ عددا مركب حيث $x\in\Re ; y\in\Re$

مرافق العدد $z$ هو العدد المركب : $\bar{z}=x-iy$

| | |
|---|---|
| • $\overline{z+z'}=\bar{z}+\bar{z}'$<br>• $\overline{z\times z'}=\bar{z}\times\bar{z}'$<br>• $(n\in\aleph)\ \overline{z^n}=\bar{z}^n$<br>• $z'\neq 0 \quad \overline{\left(\frac{1}{z'}\right)}=\frac{1}{\bar{z}'}$<br>• $z'\neq 0 \quad \overline{\left(\frac{z}{z'}\right)}=\frac{\bar{z}}{\bar{z}'}$ | • $\bar{z}=z \Leftrightarrow z$ عدد حقيقي<br>• $\bar{z}=-z \Leftrightarrow z$ عدد تخبلي صرف1<br>• $z+\bar{z}=2\,\mathrm{Re}(z)$<br>• $z-\bar{z}=2i\,\mathrm{Im}(z)$<br>• $z\times\bar{z}=[\mathrm{Im}(z)]^2+[\mathrm{Re}(z)]^2$ |

## طويلة عدد مركب:

ل ليكن $z=x+iy$ عددا مركب حيث $x\in\Re; y\in\Re$

طويلة العدد المركب $z$ هو العدد الحقيقي الموجب : $|z|=\sqrt{z\bar{z}}=\sqrt{x^2+y^2}$

| | | |
|---|---|---|
| $\lvert z\times z'\rvert=\lvert z\rvert\times\lvert z'\rvert$ | $\lvert\bar{z}\rvert=\lvert z\rvert$ | $\lvert -z\rvert=\lvert z\rvert$ |
| $n\in IN^*$ $\quad \lvert z^n\rvert=\lvert z\rvert^n$ | $\left\lvert\frac{z}{z'}\right\rvert=\frac{\lvert z\rvert}{\lvert z'\rvert}$ $\quad z'\neq 0$ | $\left\lvert\frac{1}{z'}\right\rvert=\frac{1}{\lvert z'\rvert}$ $\quad z'\neq 0$ |

## الشكل المثلثي و الكتابة الآسية لعدد مركب غير معدوم:

لبكن $z$ عددا مركب غير معدوم صورته $M$ .

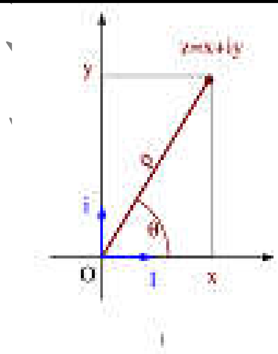
- عمدة العدد المركب $z$ هو $\theta$ احد قياسات الزاوية الموجهة : $(\vec{i};\overrightarrow{OM})$

ونرمز له بالرمز : $\arg z$ ونكتب : $\arg z\equiv\theta[2\pi]$

- نضع : $r=|z|$ و $\arg z\equiv\theta[2\pi]$ فالشكل لمثلثي للعدد المركب هو :

$$z=r(\cos\theta+i\sin\theta)\equiv[r,\theta]$$

- و الكتابة الاسية للعدد المركب $z$ هي : $z=re^{i\theta}$




$\bullet re^{i\theta}\times r'e^{i\theta'}=rr'e^{i(\theta+\theta')}$ / $\bullet\overline{re^{i\theta}}\equiv re^{-i\theta}$ / $\bullet -re^{i\theta}\equiv re^{i(\pi+\theta)}$

$\bullet(re^{i\theta})^n\equiv r^ne^{in\theta}$ / $\bullet\frac{1}{r'e^{i\theta'}}\equiv\frac{1}{r'}e^{-i\theta'}$ / $\bullet\frac{re^{i\theta}}{r'e^{i\theta'}}\equiv\frac{r}{r'}e^{i(\theta-\theta')}$

| | |
|---|---|
| $\bullet\ \arg(zz')\equiv(\arg z+\arg z')[2\pi]$ | $\bullet[r,\theta]\times[r',\theta']\equiv[rr',\theta+\theta']$ |
| $\bullet\ \arg\bar{z}\equiv-\arg z[2\pi]$ | $\bullet\overline{[r,\theta]}\equiv[r,-\theta]$ |
| $\bullet\ -\arg z\equiv(\pi+\arg z)[2\pi]$ | $\bullet-[r,\theta]\equiv[r,\pi+\theta]$ |
| $\bullet\ \arg z^n\equiv n\arg z[2\pi]$ | $\bullet[r,\theta]^n\equiv[r^n,n\theta]$ |
| $\bullet\ \arg\frac{1}{z}\equiv-\arg z[2\pi]$ | $\bullet\frac{1}{[r',\theta']}=\left[\frac{1}{r'},-\theta'\right]$ |
| $\bullet\ \arg\frac{z'}{z}\equiv(\arg z'-\arg z)[2\pi]$ | $\bullet\frac{[r,\theta]}{[r',\theta']}=\left[\frac{r}{r'},\theta-\theta'\right]$ |
| $\forall k\in\mathbb{Z}\ [r,\theta+2k\pi]\equiv[r,\theta]$ | $\forall k\in\mathbb{Z}$<br>عدد حقيقي $z\Leftrightarrow\arg z\equiv k\pi$<br>عدد تخيلي صرف $z\Leftrightarrow\arg z\equiv\frac{\pi}{2}+k\pi$ |

علاقة موافر : $\boxed{\forall n\in\aleph\ ,\ (\cos\theta+i\sin\theta)^n=\cos(n\theta)+i\sin(n\theta)}$

علاقة اولر : $\boxed{\forall n\in\aleph\ ,\ \cos\theta=\frac{1}{2}(e^{i\theta}+e^{-i\theta})\ ;\ \sin\theta=\frac{1}{2}(e^{i\theta}-e^{-i\theta})}$

---

حل المعادلة $z\in\mathbb{C}\,;z^2=a$ حيث : $(a\in\Re^*)$

| المعادلة: | | مجموعة حلول المعادلة: |
|---|---|---|
| $z\in\mathbb{C}\,;z^2=a$ | $a>0$ | $s=\{-\sqrt{a}\ ,\ \sqrt{a}\}$ |
| | $a=0$ | $s=\{0\}$ |
| | $a<0$ | $s=\{-i\sqrt{-a}\ ,\ i\sqrt{-a}\}$ |
| | | |

حل المعادلة $z\in\mathbb{C}\,; az^2+bz+c=0$ حيث : $(a\in\Re^*)$

| مجموعة حلول المعادلة: | | المعادلة : |
|---|---|---|
| $s=\left\{\frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a}\,,\,\frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a}\right\}$ | $\Delta>0$ | $z\in\mathbb{C}\,;az^2+bz+c=0$ <br> $(\Delta=b^2-4ac)$ |
| $s=\left\{\frac{-b}{2a}\right\}$ | $\Delta=0$ | |
| $s=\left\{\frac{-b-i\sqrt{-\Delta}}{2a}\,,\,\frac{-b+i\sqrt{-\Delta}}{2a}\right\}$ | $\Delta<0$ | |

| $\alpha$ | 0 | $\frac{\pi}{6}$ | $\frac{\pi}{4}$ | $\frac{\pi}{3}$ | $\frac{\pi}{2}$ |
|---|---|---|---|---|---|
| $\mathrm{Sin}(\alpha)$ | 0 | 1/2 | $\sqrt{2}/2$ | $\sqrt{3}/2$ | 1 |
| $\mathrm{Cos}(\alpha)$ | 1 | $\sqrt{3}/2$ | $\sqrt{2}/2$ | 1/2 | 0 |

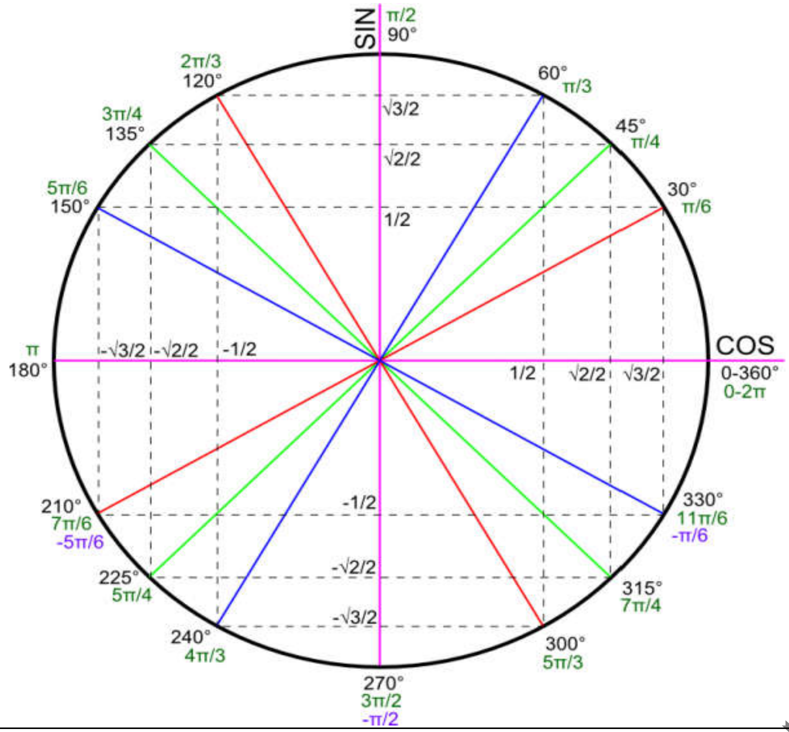
في كل مميلي من التمارين المستوي المركب منسب إلى معلم متعامد و متجانس $(o;\vec{i};\vec{j})$

و $\mathbb{C}$ هي مجموعة الأعداد المركبة مع $z$ بحيث $z\in\mathbb{C}$

## التمرين 01:

عين الجزء الحقيقي و التخيلي في كل حالة من الحالات التالية :

| | | | |
|---|---|---|---|
| $z=i$ | $z=1-\sqrt{2}$ | $z=\sqrt{3}-2i$ | $z=-2+5i$ |
| $z=\frac{7+2i}{1-i}+\frac{1+i}{7-2i}$ | $z=\frac{-2+5i}{\sqrt{3}-2i}$ | $z=\left((2-5i)(3+i)\right)$ | $z=(2-5i)+(3+i)$ |
| | | $z=\left((2-5i)+(3+i)\right)\left((2-5i)+(3+i)\right)$ | |



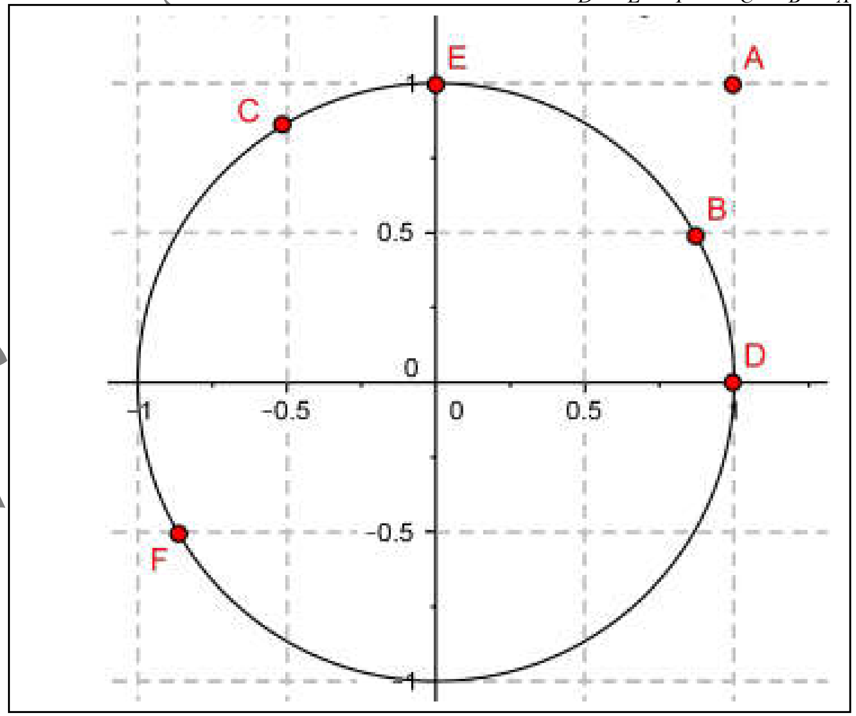

## التمرين 02:

اكتب على شكل $a+ib$ كل من الأعداد المركبة التالية :

| | | |
|---|---|---|
| $z_3=\frac{3+4i}{(2+3i)(4+i)}$ | $z_2=\frac{(2+i)(3+2i)}{(2-i)}$ | $z_1=\frac{2-\sqrt{3}i}{\sqrt{3}-2i}$ |
| | $=\left[\left(-\sqrt{3}-1\right)+\left(\sqrt{3}+1\right)i\right]^2$ | $=(1+2i)^2(3+4i)+(1-i)^3+20$ |
| $z_5=\left(\frac{5+7i}{-7+5i}\right)^{2011}$ | $z_4=\frac{-\sqrt{2}+2+\sqrt{2}i}{1+\sqrt{2}i-i}$ | $z_2=\frac{1+18i}{3+4i}+\frac{7-26i}{3-4i}-\frac{-2+15i}{i}$ |

التمرين 03:   لتكن النقط $C,B,A$ ، $D,E,F$ ذات اللاحقة على الترتيب

$z_C,z_B,z_A$ ، $z_D,z_E,z_F$




1)عين طويلة و عمدة الاعداد المركبة $z_C,z_B,z_A$ ، $z_D,z_E,z_F$

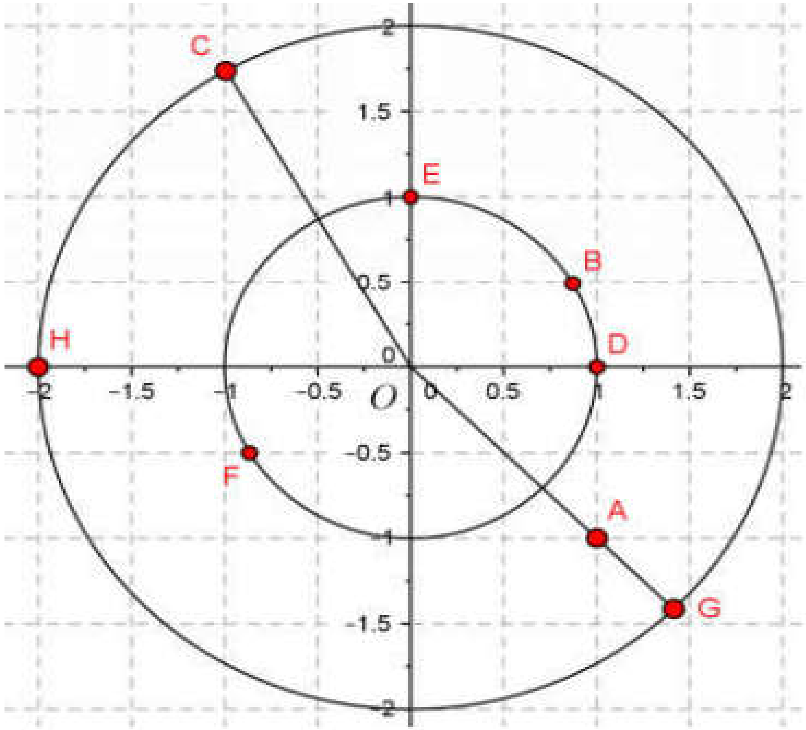
2)اكتب $z_C,z_B,z_A$ ، $z_D,z_E,z_F$ على الشكل المثلثي ، ألأسي ، والجبري .

---

التمرين 04:

لتكن النقط $C,B,A$ ، $D,E,F$ ، $G,H$ ذات اللاحقة على الترتيب $z_C,z_B,z_A$

$z_D,z_E,z_F$ $z_G,z_H$




1)عين طويلة و عمدة الأعداد المركبة $z_D,z_E,z_F$ $z_G,z_H$ $z_C,z_B,z_A$

2)اكتب $z_C,z_B,z_A$ ، $z_D,z_E,z_F$ $z_G,z_H$ على الشكل المثلثي ، ألأسي ، والجبري .

---

التمرين 05:

$z$ عداد مركب   :

يعطى : $f(z)=z^2-2z+2$

احسب  $f(1-i)$ و $f(1+i)$  ثم عين تحليل  $f(z)$

التمرين 06:

يعطى $f(z)=\frac{z+i}{iz+1}$ و $z=x+iy$ و $x$ و $y$ عددان حقيقيان ، $i^2=-1$

احسب بدلالة $x$ و $y$ الجزء الحقيقي و الجزء التخيلي لـــ $f(z)$

التمرين 07:

احسب كل من

| | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|
| $i^8=$ | $i^7=$ | $i^6=$ | $i^5=$ | $i^4=$ | $i^3=$ | $i^2=$ |

1) استنتج قيمة كل من $i^{1429}$ و $i^{2008}$ ثم عين الأعداد الطبيعية $n$ حيث يكون $i^n$ تخيلي صرف .

التمرين 08:

يعطى العددان المركبان : $Z=3+\sqrt{3}i$ و $Z'=-1+2i$

اكتب على الشكل الجبري كل من الأعداد التالية:

| | | | | |
|---|---|---|---|---|
| $Z_4=\frac{Z}{Z'}$ | $Z_4=Z'^3$ | $Z_3=Z^2$ | $Z_2=Z.\overline{Z}$ | $Z_1=Z-\overline{Z'}$ |

التمرين 09: حل في $\mathbb{C}$ المعادلات ذات المجهول $z$ التالية :

| | | |
|---|---|---|
| 3) $\frac{1+2i}{1+2z}=i\frac{z-1}{z+3}$ | 2) $iz-2=2z+1+i$ | 1) $(2+5i)z=4-2i$ |
| | 5) $2z-3i\overline{z}-1=0$ | 4) $z+2\overline{z}=3-4i$ |

التمرين 10:

1) نعتبر العددين المركبان: $Z_2=-4+4i$ ، $Z_1=3+2i$
1) احسب كل من: $Z_1+Z_2$ ، $Z_1\times Z_2$
2) احسب $Z_2^3$ ، $Z_1^3$

2) $M$ نقطة من المستوي لاحقتها $z=x+iy$ ، $M'$ نقطة من المستوي لاحقتها

$$Z'=\frac{z+1}{z-1}$$

1) اكتب $Z'$ على الشكل الجبري .
2) عين مجموعة النقط $M$ بحيث يكون $Z'$ حقيقي .
3) عين مجموعة النقط $M$ بحيث يكون $Z'$ تخيلي صرف .

التمرين 11:

نعتبر العدد المركب $L$ حيث $L=\frac{z-2i}{z+1-i}$

مع $i$ هو العدد المركب حيث $i^2=-1$ و $z$ العدد المركب بحث $z=x+iy$ و $x,y$ عددان حقيقيات .

1) اكتب $L$ على الشكل الجبري .
2) نزود المستوي بمعلم متعامد و متجانس و نرفق بكل نقطة $M$ نقطة من المستوي لاحقتها $z=x+iy$ ، $M'$ نقطة من المستوي لاحقتها $L$ .
- عين $(\Gamma_1)$ لمجموعة النقط من المستوي بحيث يكون $L$ حقيقا.
- عين $(\Gamma_2)$ مجموعة النقط من المستوي بحيث يكون $L$ تخيليا صرف.

التمرين 12:

لتكن الأعداد المركبة :

$$z_1=(1-i)(1+2i) \quad ، \quad z_2=\frac{2+6i}{3-i} \quad ، \quad z_3=\frac{4i}{-1+i}$$

$C,B,A$ هي على الترتيب صور الأعداد المركبة $z_3,z_2,z_1$ في المستوي $(\Pi)$ المنسوب إلى معلم متعامد و متجانس $(o;\vec{i};\vec{j})$.

1) احسب الجز الحقيقي و الجزء التخيلي لكل من $z_3,z_2,z_1$
2) علم النقط $C,B,A$ في المستوي $(\Pi)$
3) احسب ثم استنتج أن المثلث $CBA$ قائم و متساوي الساقين .

---

التمرين 13:

عين طويلة و عمدة الأعداد المركبة

| | | | |
|---|---|---|---|
| $z_4=-3i$ | $z_3=i$ | $z_2=-4$ | $z_1=3$ |
| $z_5=2+2i$ | $z_6=2-2i$ | $z_7=-\sqrt{3}+3i$ | $z_8=-5-5i$ |

---

التمرين 14:

نعتبر الأعداد المركبة التالية : $z_2=-3+i\sqrt{3}$ ، $z_1=1+i$

1) احسب طويلة و عمدة الأعداد المركبة $z_1$ ، $z_2$
2) بستعمال طويلة $z_1$ ، $z_2$، احسب طويلة وعمدة كل من الأعداد التالية
3)

| | | | |
|---|---|---|---|
| $Z_4=(1+i)^2$ | $Z_3=\frac{(1+i)}{-2}$ | $Z_2=\frac{-3+i\sqrt{3}}{1+i}$ | $Z_1=z_1\times z_2$ |
| $Z_8=\frac{(1+i)^3}{\left(-3+i\sqrt{3}\right)^2}$ | $z_7=-2-2i$ | $z_6=\sqrt{3}+i$ | $z_5=-3-\sqrt{3}\,i$ |

---

التمرين 15:

1) عين طويلة و عمدة الأعداد المركبة التالية :

| | |
|---|---|
| $z_2=-2\left(\cos\frac{\pi}{4}+i\sin\frac{\pi}{4}\right)$ | $z_1=2\left(\cos\frac{\pi}{4}+i\sin\frac{\pi}{4}\right)$ |
| $z_4=2\left(\cos\frac{\pi}{4}-i\sin\frac{\pi}{4}\right)$ | $z_3=2\left(-\cos\frac{\pi}{4}+i\sin\frac{\pi}{4}\right)$ |
| $z_5=-5\left(\cos\left(-\frac{\pi}{4}\right)+i\sin\left(-\frac{\pi}{4}\right)\right)$ | $z_6=-9(\cos\pi+i\sin\pi)$ |

---

## تعين الجدر التربيعي للعدد مركب

تعين الجذر التربيعي للعدد مركب : $Z=x+iy$

يعود إلى تعين العدد المركب : $z=\alpha+i\beta$

بحيث : $Z=z^2$ : $(x+iy)=(\alpha+i\beta)^2$

مع :
$$\begin{cases}\alpha^2+\beta^2=\sqrt{x^2+y^2}\\ \alpha^2-\beta^2=x\\ 2\alpha\beta=y\end{cases}$$

التمرين 16:

عين العددين الحقيقيين $\alpha\ ;\ \beta$ في كل حالة من الحالات التالية :

$$(\alpha+\beta i)^2=-32-24i \quad ; \quad (\alpha+\beta i)^2=-27-24i$$

---

التمرين 17:

عين الجذرين التربيعيين لكل من الأعداد التالية :

$$z_4=-24+10i\ ;\ z_3=-18i\ ;\ z_2=21+20i\ ;\ z_1=-15+8i$$

---

التمرين 18 :

حل في $\mathbb{C}$ مجموعة الأعداد المركبة المعادلة التالية:

الجزء الاول:

1) $z^2+3(1+i)z+5i=0$

2) $z^2-(5+3i)z+4+7i=0$

3) $z^2-(1-i)z-18+13i=0$

4) $z^2+(1+6i)z+(1+23i)=0$

6) $4z^2-(1-7i)z+3-2i=0$

7) $4z^2-3z+19=0$

الجزء الثاني:

9) $4z^2+8\overline{z}z-3=0$

10) $z^2-2iz=0$

11) $\overline{z}=\dfrac{4}{z}$

12) $(3-i)\overline{z}=\dfrac{1+i}{1-i}$

13) $z^2-z+\overline{z}=0$

14) $iz-3=(1+2i)z+1-i$

15) $\overline{z}-z=4$

16) $(3+4i)\overline{z}+4+3i=3+10i$

---

التمرين 19 : نزود المستوي بمعلم متعامد و متجانس و نرفق بكل نقطة $M$ نقطة من المستوي لاحقتها $z=x+iy$ .

عين مجموعة النقط $M$ في كل حالة :

| | | |
|---|---|---|
| 1) $\lvert z-5+3i\rvert=9$ | 3) $\lvert(1+i)\overline{z}-2i\rvert=2$ | 5) $\lvert iz-1\rvert=\lvert z+2-3i\rvert$ |
| 2) $\lvert z-5i\rvert=2\lvert z+1-3i\rvert$ | 4) $\lvert z+5-i\rvert=\lvert z+7-2i\rvert$ | 6) $\left\lvert\dfrac{\sqrt{3}+i}{2}z-1\right\rvert=\lvert 1-i-iz\rvert$ |
| 7) $\lvert z-2\rvert=\lvert 2z+3i\rvert$ | 8) $\lvert(1+i)z-i\rvert=3$ | |

---

التمرين 20:

نعتبر في مجموعة الأعداد المركبة $\mathbb{C}$ كثير الحدود $p(z)$ المعرف كما يلي :

$$p(z)=z^3-6z^2+12z-16$$

1. احسب $p(4)$ .استنتج تحليل $p(z)$ .
2. عين حلول المعادلة $p(z)=0$ في $\mathbb{C}$ .
3. لتكن $C,B,A$ النقط من المستوي المركب المنسوب إلى معلم متعامد متجانس والتي لاحقاتها على الترتيب :

$$z_A=4 \ ، \ z_C=1-i\sqrt{3} \ ، \ z_B=1+i\sqrt{3}$$

أ) عين طويلة و عمدة كل من $z_A$ و $z_B$ ، مثل النقط $C,B,A$ في المستوي المركب .

ب) عين طبيعة المثلث $ABC$