1. الــدالة الأســية

1.مبرهنة و تعريف

تـوجد دالــة وحـيـدة ، تسمـى الـدالــة الأسية، مـعــرّفة علـى مجموعة الأعداد الحـقـيـقـة، ونـرمز إلـيـهـا بالـرمـز exp حـيـث مـن أجـل كـل عـدد حـقـيـقـي x: $exp'(x)=exp(x)$ و $exp(0)=1$

مـلاحظة:

-الـدالة الأســيـة هــي حـل للـمعــادلــة التـفاضـلية $y'=y$ و تحـقـق الـشـرط الأولـي $y(0)=1$

2. خــواص أولية:

1. من أجـل كــل عدد حقـيقـي x: $exp(x) > 0$
2. من أجـل كل عددين حقيقين x و y لدينا:

$$exp(x+y)= exp(x)\, exp(y)$$

$$exp(-x)=\frac{1}{exp(x)}$$

$$exp(x-y)=\frac{exp(x)}{exp(y)}$$

3.من أجـل كــل عــدد حــقيقي x و عدد طبيــعــي n : $exp(x^n)=exp(nx)$

الــعدد e

صـــورة العــدد 1 بالدالــة الأسـيـة exp هو العــدد e أي $exp(1)=e$

والعدد e هــو عدد أصم قيمته التــقــربية هي

$e \approx 2,718281828459045235360287471352662497757247093.....$

التـــرميـز e^x

لدينا $exp(1)= e$ ونعــلم أنــّه من أجــل كــل عدد حــقيــقي x : $\exp(x\times 1)=\exp(1)^x=e^x$

-خــواص أولــية

مــن أجـل كـل عــدد حــقيقي x و عــدد طــبيــعــي n لــديــنــا:

$$1)\ e^0 = 1 \quad ; \quad e^x > 0$$

$$2)\ e^{x+y} = e^x e^y$$

$$3)\ \left(e^x\right)^n = e^{nx}$$

$$4)\ e^{-x} = \frac{1}{e^x}$$

$$5)\ e^{x-y} = \frac{e^x}{e^y}$$

3. الــدراســة التــحلــيــلــيــة

الــدالــة الأسـية دالــة مــستــمرة و قــابــلــة للاشتــقــاق و متـزايدة تـمامــا ، عــلى مـجمـوعة الأعــداد الحــقـيقـية .

نتيــجة

لدينا مــن أجـل كـل عــددين حقــيقـين a وb حيث

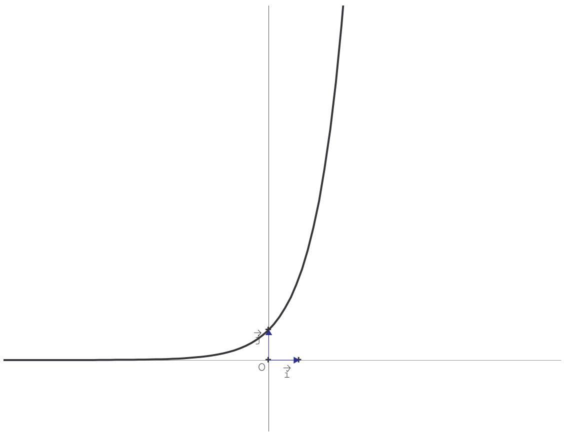
$e^a=e^b$ تــكــافـئ $a=b$

$e^a \geq e^b$ تــكــافـئ $a\geq b$

جــدول تغــيراتــها

x	$+\infty$ $\qquad\qquad$ $-\infty$
$(e^x)'$	$+$
e^x	$\nearrow$

وتمثيلهــا البــيانــي



الــنــهايات المـــرجـعـــيـــة

nعدد طبيــعــي

$$\lim_{x\to+\infty} e^x = +\infty \quad ; \quad \lim_{x\to-\infty} e^x = 0 \quad ; \quad \lim_{x\to+\infty} \frac{e^x}{x^n} = +\infty \; ; \; \lim_{x\to-\infty} x^n e^x = 0 \quad ; \lim_{x\to 0} \frac{e^x - 1}{x} = 1$$

الــدالـــة الـــمـــشـــتـــقـــة

نــعلــم أنــّه من أجــل كــل عدد حقــيقــي x :$(e^x)' = e^x$

إذا كــانت u دالــة عــدديــة مــعرّفــة عــلــى الــمــجال I من مجموعــة الأعــداد الحــقيــقية،

فــإنّ الدالــة fحيث $f(x) = e^{u(x)}$ قــابـــلـــة للاشـــتـــقـــاق عــلى I حــيــث:

$$f'(x) = u'(x)e^{u(x)}$$

مـــبرهنات

a و b عددان حقــيــقــيان غير معدومين.

1. المعـــادلـــة التفاضلية y'=ay ، تــقــبل حــلولا من الشــكـــل $x \mapsto ke^{ax}$ حيث kعــدد حقــيــقــي
2. مــن أجــل كــل ثــنــائــية$(x_0 ;y_0)$ المعــادلـــة $y'= ay$ تقــبل حــلا وحــيدا fحيث $f(x_0)=y_0$
3. المعـــادلـــة التفاضلية y'=ay+b ، تــقــبل حــلولا من الشــكـــل $x \mapsto ke^{ax} - \frac{b}{a}$ حيث kعــدد حقيقي.