

الكفاءات

*توظيف الجداء السلمي في
حل المسائل الهندسية المرتبطة
بالمستقيمات و المستويات
*توظيف الجداء السلمي في
تعيين مجموعات النقط

الجداء السلمي في الفضاء

تقدم هذه الفقرة من خلال أنشطة
مختلفة ، تحدد كل هذه المفاهيم.

1 تذكر بالجداء السلمي في المستوي.

- 1-1 العبارات الأربعة للجداء السلمي.
- 2-1 تعامد شعاعين في المستوي
- 3-1 المسافة بين نقطة ومستقيم.
- 4-1 خواص الجداء السلمي .
- 5-1 أنشطة تحدد فيها استخدامات الجداء السلمي .

2 الجداء السلمي في الفضاء.

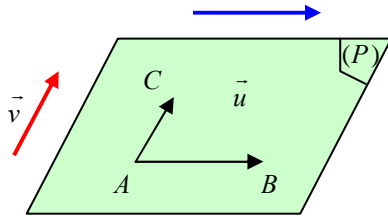
- نشاط أو أنشطة تبرز فيها : المعلم المتعامد المتجانس في الفضاء-احداثيات النقط-المستقيمات و المستويات المتعامدة (تذكرة بالسنة الثانية)

1-2 تعريف الجداء السلمي في الفضاء.

*تعريف:

نختار وحدة أطوال في الفضاء . \vec{u} و \vec{v} شعاعان من الفضاء
الجداء السلمي للشعاعين \vec{u} و \vec{v} هو العدد الحقيقي الذي يرمز له بالرمز $\vec{u} \cdot \vec{v}$
المعرفة بـ : $\vec{u} \cdot \vec{v} = \frac{1}{2} [\|\vec{u} + \vec{v}\|^2 - \|\vec{u}\|^2 - \|\vec{v}\|^2]$

يمكن أن يقدم
التعريف ،
بأشكال أخرى



▪ \vec{u} و \vec{v} شعاعان من الفضاء معناه يوجد مستوي (P)

يشمل النقط A ، B ، و C

حيث $\vec{u} = \vec{AB}$ ، $\vec{v} = \vec{AC}$

و منه : $\vec{u} \cdot \vec{v} = \vec{AB} \cdot \vec{AC}$

▪ إذا كانت α هي القياس الجبري للزاوية بين \vec{u} و \vec{v}

فإن : $\vec{u} \cdot \vec{v} = \|\vec{u}\| \cdot \|\vec{v}\| \cdot \cos \alpha$

نتيجة : $\vec{AB} \cdot \vec{AB} = \|\vec{AB}\|^2 = AB^2$

▪ إذا كان في المستوي (P) ، النقط H المسقط العمودي

لنقطه C على المستقيم (AB) ، فإن :

$\vec{AB} \cdot \vec{AC} = \vec{AB} \cdot \vec{AH}$

▪ إذا كان : $\vec{u} = \vec{0}$ أو $\vec{v} = \vec{0}$ فإن : $\vec{u} \cdot \vec{v} = 0$

2-2 العبارة التحليلية للجداء السلمي .

* مبرهنة : في معلم متعامد متجانس ، إذا كان $\vec{u}(x;y;z)$; $\vec{v}(x';y';z')$

فإن : $\vec{u} \cdot \vec{v} = x.x' + y.y' + z.z'$

البرهان :

* المسافة بين نقطتين.

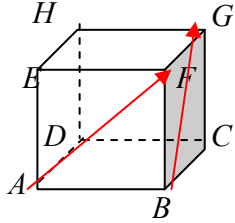
3-2 خواص .

* مبرهنة : مهما تكن الأشعة $\vec{u}; \vec{v}; \vec{w}$ و العددين الحقيقيين $b; a$:

$$1. \vec{u} \cdot \vec{v} = \vec{v} \cdot \vec{u}$$

$$2. \vec{u} \cdot (\vec{v} + \vec{w}) = \vec{u} \cdot \vec{v} + \vec{u} \cdot \vec{w}$$

$$3. (a\vec{u}) \cdot (b\vec{v}) = (ab) \vec{u} \cdot \vec{v}$$



4-2 تطبيقات:

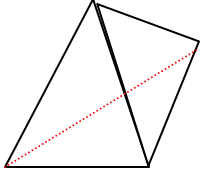
1/ احسب القيس α للزاوية الهندسية بين الشعاعين \vec{AF} ; \vec{BG} في المكعب الموضح في الشكل.

2/ $ABCD$ رباعي الوجوه منتظم حرفه a ، كل وجه هو مثلث متساوي الأضلاع طول ضلعه a أحسب

$$\vec{AB} \cdot \vec{AC} ; \vec{AB} \cdot \vec{AD} ; \vec{AB} \cdot \vec{CD}$$

...../3

...../4



التعامد في الفضاء .

3

1-3 الشعاعان المتعامدان .

■ تعريف : في الفضاء ، يقال عن شعاعين غير معدومين \vec{u} و \vec{v} ، إنهما متعامدان يعني إذا كان $\vec{u} = \vec{AB}$ و $\vec{v} = \vec{CD}$ ، فإن المستقيمان (AB) و (CD) متعامدان.

* $\vec{0}$ عمودي على كل شعاع من الفضاء.

■ مبرهنة : 1. يقال أن $\langle \vec{u}, \vec{v} \rangle$ الشعاعان \vec{u} و \vec{v} ، متعامدان $\Leftrightarrow \vec{u} \cdot \vec{v} = 0$: يكافئ القول :

2. في معلم متعامد متجانس ، $\vec{u}(x; y; z)$; $\vec{v}(x'; y'; z')$ الشعاعان

$$\text{متعامدان} \Leftrightarrow \text{يكافئ : } x \cdot x' + y \cdot y' + z \cdot z' = 0$$

البرهان :

2-3 الشعاع الناظمي على مستو .

■ تعريف :

■ مبرهنة :

\vec{n} شعاع غير معدوم . A نقطة من الفضاء
مجموعة النقط M من الفضاء والتي تحقق $\vec{n} \cdot \vec{AM} = 0$
هي المستوي (P) الذي يشمل A و \vec{n} شعاع ناظمي له .

3-3 تطبيقات : 1/ توظيف الجداء السلمي في إثبات أن شعاع ناظمي على مستوي

2/ توظيف الجداء السلمي في إثبات تعامد مستقيمين .

3/ توظيف الجداء السلمي في إثبات تعامد مستقيم ومستو

المعادلة الديكارتية لمستوي.

4

1-4 المعادلة الديكارتية لمستوي.

مبرهنة: في معلم متعامد متجانس.

1. إذا كان المستوي (P) له شعاع ناظمي $\vec{n}(a;b;c)$ ، فإن المستوي (P)

له معادلة ديكارتية بالشكل $ax + by + cz + d = 0$

حيث a, b, c غير معدومة معا، لأن $\vec{n}(a;b;c)$ شعاع ناظمي .

2. بالعكس فإن مجموعة النقط (M(x ; y ; z) التي تحقق : $ax + by + cz + d = 0$

حيث a, b, c أعداد حقيقة غير معدومة معا هي مستوي و $\vec{n}(a;b;c)$ شعاع ناظمي له.

البرهان:

تطبيقات على كيفية ايجاد معادلة مستوي . (معادلة مستوي معرف بشعاعين مرتبطين خطيا و نقطة)

معادلات المستويات الخاصة : $x = 0$; $y = 0$ و $z = 0$ أو الموازية لأحد هذه المستويات.

شرط تعامد (توازي) مستويين.

2-4 بعد نقطة عن مستوي .

مبرهنة: $\frac{|a\alpha + b\beta + c\gamma + d|}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}}$ بعد $A(\alpha;\beta;\gamma)$ عن $ax + by + cz + d = 0$

البرهان:

3-4 التمثيل الديكارتي لمستقيم .

مبرهنة (تقبل): $(P_1); (P_2)$ مستويان من الفضاء غير متوازيين معادلتهما الديكارتية على الترتيب:

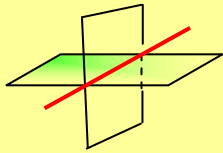
$$a_1x + b_1y + c_1z + d_1 = 0 ; a_2x + b_2y + c_2z + d_2 = 0$$

مجموعة النقط التي تحقق الجملة :

$$\begin{cases} a_1x + b_1y + c_1z + d_1 = 0 \\ a_2x + b_2y + c_2z + d_2 = 0 \end{cases}$$

هي مستقيم في الفضاء.

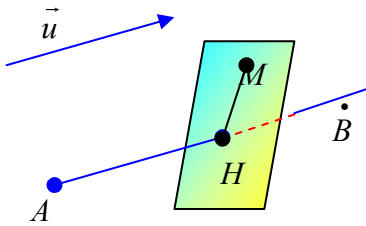
<> جملة معادلتين ديكارتييتين لمستقيم <>



4-4 4-4 توظيف الجداء السلمي في تعيين مجموعات النقط.

مبرهنة: مجموعة النقط M حيث : $\vec{AM} \cdot \vec{u} = k$ ، نقطة من الفضاء و \vec{u} شعاع غير معدوم،

و k عدد حقيقي.



مبرهنة: مجموعة النقط M هي المستوي العمودي على المستقيم (AB) في النقطة H المعرفة كما يلي: $\vec{AB} \cdot \vec{AH} = k$ حيث $\vec{AB} = \vec{u}$

البرهان:

مبرهنة: مجموعة النقط M بحيث : $\alpha MA^2 + \beta MB^2 = k$ ، k عدد حقيقي.

* نميز حالتين : 1- $\alpha + \beta = 0$

2- $\alpha + \beta \neq 0$

المستقيمات و المستويات في الفضاء

5

1-5 أنشطة .

التركيز على الناحية
الجبرية في العمل
لنستفيد منها في
التفسير الهندسية

حل جملة ثلاثة معادلات خطية لثلاثة مجاهيل .
مثال 1: طريقة التعويض .
مثال 2: طريقة غوس (GAUSS) (الجملة المتلثية)

2-5 التمييز المرجحي لمستقيم ، قطعة مستقيمة و مستوي :

التذكير بـ : مرجح n نقطة مثقلة .
التذكير بـ : المبرهنة التالية: من أجل كل نقطة M من الفضاء يكون :

$$a_1 \overrightarrow{MA_1} + a_2 \overrightarrow{MA_2} + \dots + a_n \overrightarrow{MA_n} = (a_1 + a_2 + \dots + a_n) \overrightarrow{MG}$$

التمييز
في
الفضاء

تذكيرة : * المستقيم (AB) هو مجموعة النقط M التي تحقق $\overrightarrow{AM} = t \overrightarrow{AB}$ حيث $t \in \mathbb{R}$.
* القطعة المستقيمة $[AB]$ هي مجموعة النقط M التي تحقق $\overrightarrow{AM} = t \overrightarrow{AB}$ حيث $t \in [0;1]$.

لإثبات أن 3
نقط على
استقامة واحدة
، يمكن إثبات
أن إحداها هي
مرجح النقطتين
الأخرتين

مبرهنة: A, B, C ثلاث نقط ليست على استقامة واحدة .
① المستقيم (AB) هو مجموعة مراجيح للنقطتين B, A
② القطعة $[AB]$ هي مجموعة مراجيح للنقطتين
 B, A مرفقتين بمعاملين من نفس الإشارة
③ المستوي (ABC) هو مجموعة مراجيح للنقط A, B, C

إذا كانت المعاملات
موجبة ، فإن مجموعة
المراجع تكون داخل المثلث
ABC. برهن العكس

البرهان :

ملاحظة: $\langle \langle \overrightarrow{AM} = t \overrightarrow{AB} \text{ حيث } t \in \mathbb{R} \rangle \rangle$ يكافئ $\langle \langle M \text{ مرجح } (A;1-t);(B;t) \rangle \rangle$

مثال : $\overrightarrow{AM} = \frac{5}{2} \overrightarrow{AB}$ و منه $t = \frac{5}{2}$ و $1-t = -\frac{3}{2}$ ، إذن M هي مرجح $(A;-\frac{3}{2});(B;\frac{5}{2})$

3-5 التمثيلات الوسيطية.

الفضاء منسوب إلى معلم متعامد متجانس $(O; \vec{i}; \vec{j}; \vec{k})$.
التمثيل الوسيطى لمستقيم .

$$(S) \begin{cases} x = at + x_0 \\ y = bt + y_0 \\ z = ct + z_0 \end{cases} \quad t \in \mathbb{R} \quad \text{مبرهنة:} \dots\dots\dots$$

* ملاحظات : - الجملة (S) تسمى تمثيلا وسيطيا للمستقيم (D) (أو جملة معادلات

وسيطية للمستقيم (D)) الذي يشمل النقطة $A(x_0; y_0; z_0)$

و $\vec{u}(a;b;c)$ شعاع توجيه له.

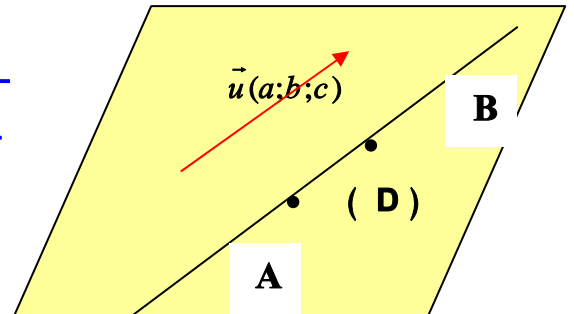
- تسمى t بالوسيط .

- في الجملة (S) إذا استبدلنا $t \in \mathbb{R}$ بـ $t \in [0;1]$ نجد التمثيل

الوسيطي للقطعة المستقيمة $[AB]$ حيث $\overrightarrow{AB} = \vec{u}$.

- في الجملة (S) إذا استبدلنا $t \in \mathbb{R}$ بـ $t \in [0;+\infty[$ نجد التمثيل

الوسيطي انصف المستقيم $[AB)$ حيث $\overrightarrow{AB} = \vec{u}$.



التمثيل الوسيط لمستوى: مبرهنة:

الانتقال من جملة معادلتين ديكارتيتين لمستقيم إلى التمثيل الوسيط له ، و بالعكس .
* نكتفي بأمثلة تطبيقية.

الانتقال من معادلة ديكارتية لمستوى إلى التمثيل الوسيط له ، و بالعكس .
* نكتفي بأمثلة تطبيقية.

شرط تعامد مستقيمين .

شرط تعامد مستقيم ومستوى .

مسائل الاستقامة لثلاث نقط-انتماء 4 نقط لنفس المستوى

4-5 الأوضاع النسبية و التقاطعات.

الوضع النسبي لمستويين :

* $(P_1); (P_2)$ مستويان من الفضاء ، معادلتاهما الديكارتية على الترتيب:


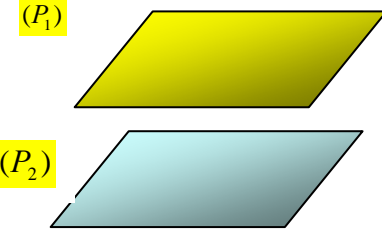
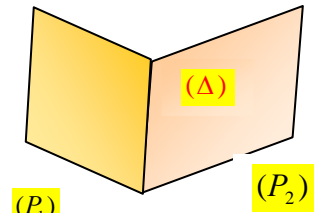
$$a_1x + b_1y + c_1z + d_1 = 0 ; a_2x + b_2y + c_2z + d_2 = 0$$

يمكن أن نعرف الوضعية النسبية لهذين المستويين من خلال الشعاعان الناظران
لهما ، هل هما مرتبطان خطيا أم لا .

و لتحديد إحداثيات نقط التقاطع في حالة وجودها نقوم بحل جملة المعادلتين:

$$(S) \begin{cases} a_1x + b_1y + c_1z + d_1 = 0 & (1) \\ a_2x + b_2y + c_2z + d_2 = 0 & (2) \end{cases}$$

الجدول التالي يحدد مختلف الوضعيات للمستويين $(P_1); (P_2)$ ، ويحدد مجموعة
حلول الجملة (S)

$(P_1); (P_2)$ متطابقان	$(P_1); (P_2)$ منفصلان (متوازيان)	$(P_1); (P_2)$ متقاطعان
 $(P_1) = (P_2)$	 (P_1) (P_2)	 (P_1) (P_2) (Δ)
الجملة (S) تقبل حلول ، هي كل الثنائيات $(x, y; z)$ التي تحقق المعادلة (1) أو (2)	الجملة (S) ليس لها أي حل	الجملة (S) لها عدد لانهائي من الحلول هي الثنائيات $(x, y; z)$ التي تحقق الجملة (S) و هي إحداثيات نقط المستقيم (Δ)

الوضع النسبي لمستوى ومستقيم :

(P) مستوى معادلته $ax + by + cz + d = 0$ و منه له شعاع ناظم هو $\vec{n}(a; b; c)$.

(D) مستقيم له شعاع توجيه هو $\vec{u}(\alpha; \beta; \gamma)$ و يشمل النقطة $A(x_0; y_0; z_0)$

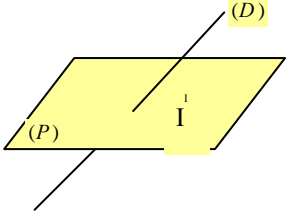
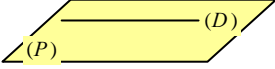
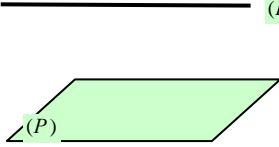
يمكن التعرف على الوضعية بين المستوي (P) و المستقيم (D) من الشعاعان $\vec{n}(a; b; c)$

$\vec{u}(\alpha; \beta; \gamma)$ هل هما متعامدان أم لا ؟

و لتحديد إحداثيات نقط التقاطع في حالة وجودها نقوم بحل الجملة (S) التالية :

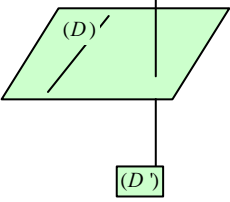
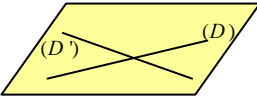
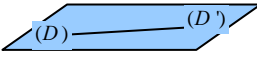
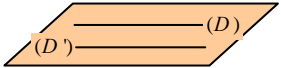
$$(S) \begin{cases} x = \alpha t + x_0 \\ y = \beta t + y_0 \\ z = \gamma t + z_0 \\ ax + by + cz + d = 0 \end{cases}$$

*الجدول التالي يحدد مختلف الوضعيات.

(D) و (P) متقاطعان في I	(D) محتوى في (P)	(D) و (P) منفصلان
		
الجملة (S) لها حل وحيد هو إحداثيات النقطة I	الجملة (S) لها عدد لانهائي من الحلول هي إحداثيات المستقيم (D)	الجملة (S) ليس لها أي حل

الوضع النسبي لمستقيمين :

(D) مستقيم يشمل النقطة $A_1(x_1; y_1; z_1)$ و $\vec{u}(\alpha_1; \beta_1; \gamma_1)$ شعاع توجيه له، و (D') مستقيم آخر يشمل النقطة $A_2(x_2; y_2; z_2)$ و $\vec{u}'(\alpha_2; \beta_2; \gamma_2)$ شعاع توجيه له
يمكن التعرف على الوضعية بين (D) و (D') من خلال شعاع توجيه كل منهما ،
*إذا كان $\vec{u}(\alpha_1; \beta_1; \gamma_1)$ و $\vec{u}'(\alpha_2; \beta_2; \gamma_2)$ مرتبطين خطيا فإن (D) و (D') إما متوازيين و إما متطابقين.
* إذا كان $\vec{u}(\alpha_1; \beta_1; \gamma_1)$ و $\vec{u}'(\alpha_2; \beta_2; \gamma_2)$ غير مرتبطين خطيا فإن (D) و (D') إما متقاطعين في نقطة واحدة و إما منفصلين (في مستويين مختلفين) .
و لتحديد التقاطع نستخدم الجمل الوسيطة لكل منهما.

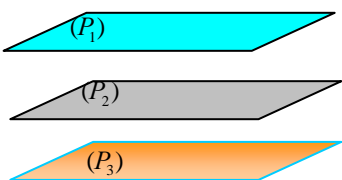
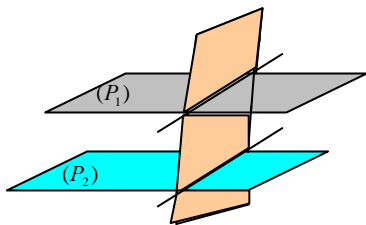
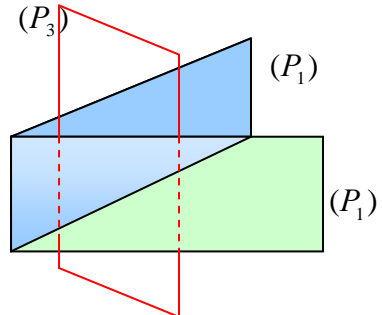
$\vec{u}(\alpha_1; \beta_1; \gamma_1)$ و $\vec{u}'(\alpha_2; \beta_2; \gamma_2)$ غير مرتبطين خطيا		$\vec{u}(\alpha_1; \beta_1; \gamma_1)$ و $\vec{u}'(\alpha_2; \beta_2; \gamma_2)$ مرتبطين خطيا	
(D) و (D') من مستويين مختلفين	(D) و (D') من نفس المستوي	(D) و (D') من نفس المستوي	(D) و (D') من نفس المستوي
منفصلين	متقاطعين في نقطة واحدة	منطبقين	متوازيين و مختلفين
			
الجملة ليس لها حل	الجملة لها حل واحد	الجملة لها عدد لانهائي من الحلول	الجملة ليس لها حل

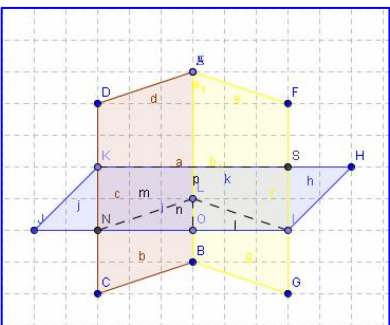
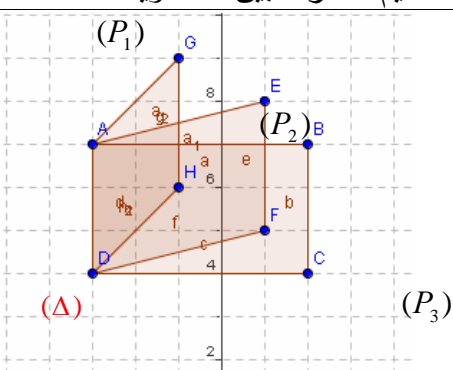
5-5 تقاطع ثلاثة مستويات

(P_1) ، (P_2) ، (P_3) ثلاث مستويات \vec{n}_1 ، \vec{n}_2 ، \vec{n}_3 أشعة ناظمية لها .

* ن سجل بأنه في حالة تطابق مستويين من هذه المستويات ، فإن دراسة تقاطع ثلاثة مستويات يعود إلى تقاطع مستويين ، و هي الحالة المدروسة سابقا .

* لهذا نفرض المستويات الثلاثة مختلفة مثلي مثلي . من أجل تعيين تقاطع هذه المستويات الثلاثة ، نحدد في البداية التقاطع $(P_1) \cap (P_2)$ للمستويين (P_1) ، (P_2) ، ثم نقاط بين $(P_1) \cap (P_2)$ و (P_3) (حسب ما سبق)
* الحالات المختلفة ملخصة في الجدول التالي :

لا توجد أي نقطة مشتركة بين المستويات الثلاثة		
		

نقطة مشتركة وحيدة	مستقيم مشترك بين المستويات
	

* (P_1) ، (P_2) ، (P_3) ثلاث مستويات من الفضاء معادلاتهم على الترتيب هي $a_1x + b_1y + c_1z + d_1 = 0$

$$a_2x + b_2y + c_2z + d_2 = 0 \text{ و } a_3x + b_3y + c_3z + d_3 = 0$$

$$(S) \begin{cases} a_1x + b_1y + c_1z + d_1 = 0 \\ a_2x + b_2y + c_2z + d_2 = 0 \\ a_3x + b_3y + c_3z + d_3 = 0 \end{cases}$$

* دراسة تقاطع المستويات الثلاثة ، يعود إلى حل الجملة التالية:

مجموعة حلول الجملة (S)	تقاطع (P_1) ، (P_2) ، (P_3)
مجموعة خالية	لا توجد أي نقطة مشتركة
ثنائية وحيدة هي إحداثيات I	نقطة مشتركة وحيدة I
كل الثنائيات (x;y;z) حلول الجملة ، مشكلة من جملة المعادلتين المعرفتين للمستقيم (Δ)	مستقيم (Δ) (Δ) معرف بواسطة معادلتين من المعادلات الثلاث
كل الثنائيات (x;y;z) ، التي تحقق أحد المعادلات الثلاث	مستو (في حالة $(P_3) = (P_2) = (P_1)$)

تم نشر هذا الملف بواسطة قرص **تجربتي** مع الباكالوريا

tajribatybac@gmail.com

facebook.com/tajribaty

jjel.tk/bac