

## Fonctions Exponentielles :

## I. الدوال الأسية النبرية :

## 1. تعريف :

نعلم أن  $\ln$  دالة متصلة وتزايدية قطعاً على المجال  $]0, +\infty[$  . إذن  $\ln$  تقابل من المجال

$$J = \left] \lim_{x \rightarrow 0^+} \ln x, \lim_{x \rightarrow +\infty} \ln x \right[ = ]-\infty, +\infty[ = \mathbb{R} \text{ نحو المجال } ]0, +\infty[$$

الدالة العكسية للدالة  $\ln$  تسمى الدالة الأسية النبرية ونرمز لها بالرمز  $\exp$  ، ولدينا :

$$\exp = \ln^{-1} \text{ و } \exp : \mathbb{R} \rightarrow ]0, +\infty[ \\ x \mapsto \exp(x) = \ln^{-1}(x)$$

## 2. ملاحظات :

✓  $\exp$  دالة متصلة وتزايدية قطعاً على المجال  $]0, +\infty[$  . (  $\exp = \ln^{-1}$  )

✓ نعلم أن :  $\lim_{x \rightarrow 0^+} \ln x = -\infty$  و  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \ln x = +\infty$  . إذن :

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \exp(x) = +\infty \text{ و } \lim_{x \rightarrow -\infty} \exp(x) = 0$$

$$\forall x \in \mathbb{R} : \exp(x) > 0 \quad \checkmark$$

✓ مجموعة تعريف الدالة  $\exp$  هي  $\mathbb{R}$  .

## 3. قاعدة التحويل :

$$\forall x \in ]0, +\infty[ , \forall y \in \mathbb{R} : \ln x = y \Leftrightarrow x = \exp(y)$$

$$\ln(1) = 0 \Rightarrow \exp(0) = 1$$

$$\ln(e) = 1 \Rightarrow \exp(1) = e$$

$$\ln(e^2) = 2 \Rightarrow \exp(2) = e^2$$

مثال :

## 4. خاصيات :

لكل  $x \in \mathbb{R}$  ولكل  $y \in \mathbb{R}$  ولكل  $n \in \mathbb{N}$  ولكل  $r \in \mathbb{Q}$  ، لدينا :

$$\exp(x + y) = \exp(x) \times \exp(y)$$

$$\exp(x - y) = \frac{\exp(x)}{\exp(y)} \text{ و } \exp(-x) = \frac{1}{\exp(x)}$$

$$\exp(rx) = (\exp(x))^r \text{ و } \exp(nx) = (\exp(x))^n$$

برهان :

نضع :  $a = \exp(x)$  و  $b = \exp(y)$  . إذن :  $x = \ln(a)$  و  $y = \ln(b)$  و  $a > 0$  و  $b > 0$  .

ولدينا :  $\ln(ab) = \ln(a) + \ln(b) = x + y$  و  $ab > 0$  . إذن :  $ab = \exp(x + y)$  . أي :

$$\exp(x + y) = \exp(x) \times \exp(y)$$

5. كتابة جديدة لـ  $\exp(x)$  :

نعلم أن :  $\ln(e^r) = r$  :  $\forall r \in \mathbb{Q}$  . إذن :  $\exp(r) = e^r$  :  $\forall r \in \mathbb{Q}$  . ثم نمدد هذه العلاقة إلى  $\mathbb{R}$  :

$$\forall x \in \mathbb{R} : \exp(x) = e^x$$

نتيجة :

$$\boxed{\lim_{x \rightarrow -\infty} e^x = 0} ; \boxed{\lim_{x \rightarrow +\infty} e^x = +\infty} \quad (i)$$

$$\forall x \in ]0, +\infty[ ; \forall y \in \mathbb{R} : \boxed{\ln(x) = y \Leftrightarrow x = e^y} \quad (ii)$$

$$\forall x \in \mathbb{R} ; \forall y \in \mathbb{R} ; \forall r \in \mathbb{Q} : \quad (iii)$$

$$\boxed{e^{-x} = \frac{1}{e^x} ; e^{x+y} = e^x e^y}$$

$$\boxed{e^{rx} = (e^x)^r ; e^{x-y} = \frac{e^x}{e^y}}$$

(iv) لدينا :

$$\exp : \mathbb{R} \rightarrow ]0, +\infty[$$

$$x \mapsto \exp(x) = e^x$$

## 7. نهايات هامة :

$$\boxed{\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - 1}{x} = 1} \quad \boxed{\lim_{x \rightarrow -\infty} x e^x = 0} ; \quad \boxed{\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^x}{x} = +\infty}$$

برهان :

نعتبر  $t = e^x$  . لدينا :  $t \xrightarrow{x \rightarrow +\infty} +\infty$  . إذن :  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^x}{x} = \lim_{t \rightarrow +\infty} \frac{t}{\ln(t)} = \lim_{t \rightarrow +\infty} \frac{1}{\frac{\ln(t)}{t}} = +\infty$

ولدينا :  $t \xrightarrow{x \rightarrow -\infty} 0^+$  . إذن :  $\lim_{x \rightarrow -\infty} x e^x = \lim_{t \rightarrow 0^+} t \ln(t) = -\infty$

ولدينا :  $t \xrightarrow{x \rightarrow 0} 1$  . إذن :  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - 1}{x} = \lim_{t \rightarrow 1} \frac{t - 1}{\ln(t)} = \lim_{t \rightarrow 1} \frac{1}{\frac{\ln(t)}{t - 1}} = 1$

مثال : أحسب النهايات التالية :

$$C = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^x}{x^2} ; \quad B = \lim_{x \rightarrow -\infty} x^3 e^x ; \quad A = \lim_{x \rightarrow -\infty} x^2 e^x$$

$$F = \lim_{x \rightarrow -\infty} x e^{2x} ; \quad E = \lim_{x \rightarrow \infty} x \left( e^{\frac{1}{x}} - 1 \right) ; \quad D = \lim_{x \rightarrow +\infty} \sqrt{x} e^{-x}$$

## 8. خاصيات :

خاصية 1 :

$$\boxed{\forall x \in \mathbb{R} : \ln(e^x) = x}$$

$$\boxed{\forall x \in ]0, +\infty[ : e^{\ln(x)} = x}$$

خاصية 2 :

$$\boxed{\forall x \in \mathbb{R} : e^x > 0}$$

$$\boxed{\forall x \in \mathbb{R} ; \forall y \in \mathbb{R} :}$$

$$e^x = e^y \Leftrightarrow x = y$$

$$e^x < e^y \Leftrightarrow x < y$$

$$e^x \leq e^y \Leftrightarrow x \leq y$$

**مثال :** 1. حل في  $\mathbb{R}$  المعادلة :  $(E): e^x - 5 + 6e^{-x} = 0$  .

2. حل في  $\mathbb{R}$  المراجعة :  $(I): e^x - 5 + 6e^{-x} > 0$  .

**الجواب :**

1. نضرب طرفي المتعادلة  $(E)$  في  $e^x$  فنجد :

$$(E) \Leftrightarrow (e^x)^2 - 5e^x + 6 = 0$$

$$\Leftrightarrow t^2 - 5t + 6 = 0 \quad / \quad t = e^x$$

ولدينا :  $\Delta = 1$  . إذن :  $t = 2$  أو  $t = 3$  . وبالتالي فإن :

$$(E) \Leftrightarrow e^x = 2 \quad \text{أو} \quad e^x = 3$$

$$\Leftrightarrow x = \ln(2) \quad \text{أو} \quad x = \ln(3)$$

وبالتالي فإن :  $S = \{\ln(2), \ln(3)\}$  .

2. بنفس الطريقة ، نجد :

$$(F) \Leftrightarrow (e^x)^2 - 5e^x + 6 < 0$$

$$\Leftrightarrow t^2 - 5t + 6 < 0 \quad / \quad t = e^x$$

$$\Leftrightarrow 2 < t < 3 \quad / \quad t = e^x$$

$$\Leftrightarrow 2 < e^x < 3$$

$$(F) \Leftrightarrow \ln(2) < x < \ln(3)$$

وبالتالي فإن :  $S = ]\ln(2), \ln(3)[$  .

## II. مشتقة الدالة الأسية : Dérivée de la fonction Exponentielle :

### 1. الدالة المشتقة للدالة $\exp$ :

لدينا :  $]0, +\infty[ \rightarrow \mathbb{R} : \exp = \ln^{-1}$  .

✓  $\ln$  دالة قابلة للاشتقاق على المجال  $]0, +\infty[$  .

✓  $\forall x \in ]0, +\infty[ : \ln'(x) = \frac{1}{x} \neq 0$  .

إذن :  $\exp = \ln^{-1}$  دالة قابلة للاشتقاق على المجال :  $\ln(]0, +\infty[) = \mathbb{R}$  ، ولدينا :

$$\forall x \in \mathbb{R} : \exp'(x) = (\ln^{-1})'(x) = \frac{1}{\ln'(\ln^{-1}(x))} = \frac{1}{\frac{1}{\ln^{-1}(x)}} = \ln^{-1}(x) = \exp(x)$$

وبالتالي فإن :  $\forall x \in \mathbb{R} : (e^x)' = e^x$  .

**خاصية :**

$\exp$  دالة قابلة للاشتقاق على  $\mathbb{R}$  ، ولدينا :

$$\boxed{\forall x \in \mathbb{R} : (e^x)' = e^x}$$

## 2. مشتقة مركبة exp ودالة قابلة للاشتقاق على مجال :

خاصية :

لتكن  $u$  دالة قابلة للاشتقاق على مجال  $I$  . إذن :  
 $x \mapsto e^{u(x)}$  دالة قابلة للاشتقاق على المجال  $I$  ، ولدينا :

$$\forall x \in \mathbb{R} : \left( e^{u(x)} \right)' = u'(x) \times e^{u(x)}$$

لأن :  $\left( e^{u(x)} \right)' = (\exp \circ u)'(x) = u'(x) \times \exp'(u(x)) = u'(x) \times \exp(u(x)) = u'(x) \times e^{u(x)}$

$$\forall x \in \mathbb{R} : \left( e^{-x} \right)' = (x)' e^{-x} = -e^{-x}$$

مثال :

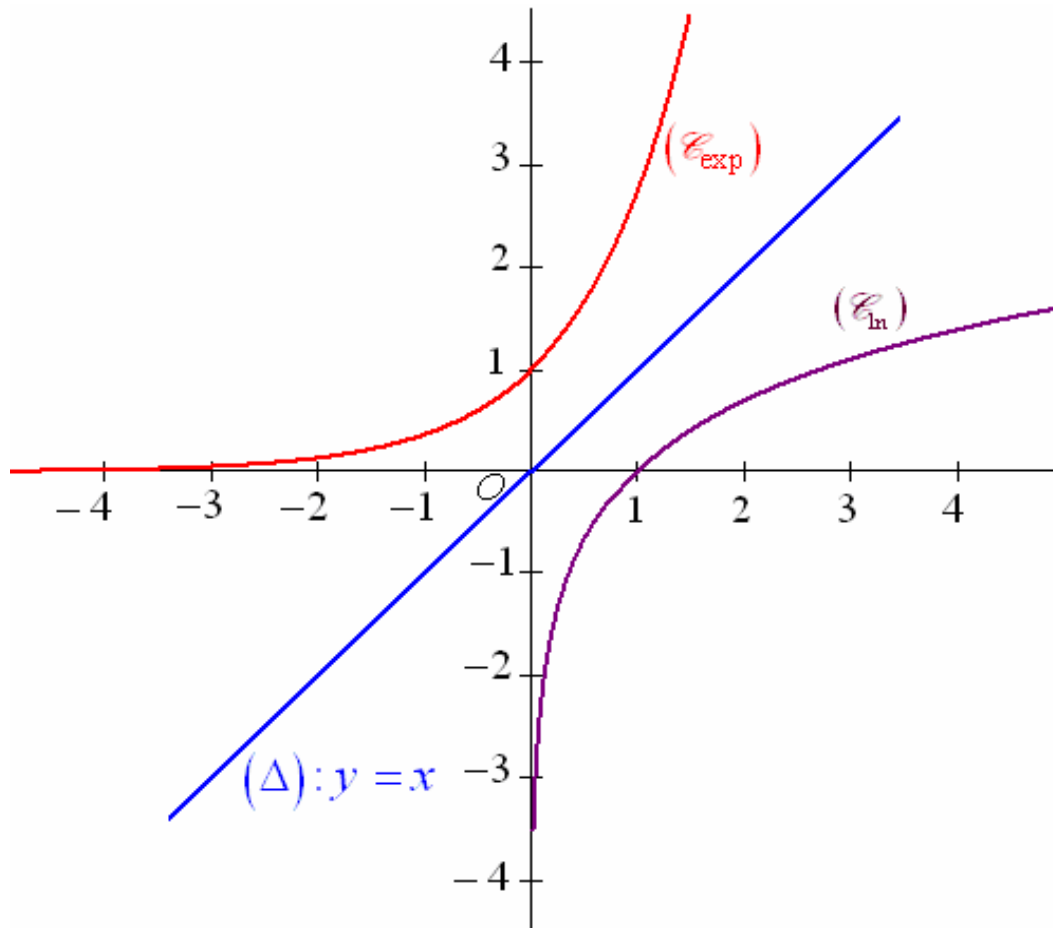
$$\forall x \in \mathbb{R} : \left( e^{2x} \right)' = (2x)' e^{2x} = 2e^{2x}$$

## 3. منحنى الدالة exp :

جدول تغيرات الدالة exp :

$x$	$-\infty$	$+\infty$
$\exp'(x)$	+	
$\exp(x)$	0	$+\infty$

منحنى الدالة exp :



1. تعريف :

ليكن  $a > 0$  و  $a \neq 1$  . نعلم أن  $\log_a$  تقابل من المجال  $]0, +\infty[$  نحو  $\mathbb{R}$  .  
التقابل العكسي للدالة  $\log_a$  يسمى الدالة الأسية للأساس  $a$  ، ونرمز لها  
بالرمز  $\exp_a$  ولدينا:

$$\exp_a = \log_a^{-1} : \mathbb{R} \rightarrow ]0, +\infty[$$

$$x \mapsto \exp_a(x) = \log_a^{-1}(x)$$

2. قاعدة التحويل :

$$\forall x \in ]0, +\infty[ ; \forall y \in \mathbb{R} : \log_a(x) = y \Leftrightarrow x = \exp_a(y)$$

مثال :

$$\log_a(1) = 0 \Rightarrow \exp_a(0) = 1$$

$$\log_a(a) = 1 \Rightarrow \exp_a(1) = a$$

$$\log_a(a^2) = 2 \Rightarrow \exp_a(2) = a^2$$

3. كتابة جديدة لـ  $\exp_a(x)$  :

ليكن  $a > 0$  و  $a \neq 1$  . لدينا :  $\forall r \in \mathbb{Q} : \log_a(a^r) = r$  . إذن :  $\exp_a(r) = a^r$  :  $\forall r \in \mathbb{Q}$  .  
يمكن أن نعمم هذه النتيجة كما يلي :  $\forall x \in \mathbb{R} : \exp_a(x) = a^x$  . إذن :

$$\exp_a : \mathbb{R} \rightarrow ]0, +\infty[$$

$$x \mapsto \exp_a(x) = a^x$$

4. خاصيات :

ليكن  $a > 0$  و  $a \neq 1$  .

لكل  $x \in \mathbb{R}$  ولكل  $y \in \mathbb{R}$  ولكل  $r \in \mathbb{Q}$  ، لدينا :

$$\exp_a(x + y) = \exp_a(x) \times \exp_a(y)$$

$$\exp_a(x - y) = \frac{\exp_a(x)}{\exp_a(y)} ; \exp_a(-x) = \frac{1}{\exp_a(x)}$$

$$\exp_a(rx) = (\exp_a(x))^r$$

ولكل  $a > 0$  ولكل  $x \in \mathbb{R}$  ولكل  $y \in \mathbb{R}$  ولكل  $r \in \mathbb{Q}$  ، لدينا :

$$a^{rx} = (a^x)^r ; 1^x = 1 ; a^{x+y} = a^x \times a^y$$

$$a^{xy} = (a^x)^y ; a^{x-y} = \frac{a^x}{a^y} ; a^{-x} = \frac{1}{a^x}$$

**برهان :** نضع :  $\alpha = \exp_a(x)$  و  $\beta = \exp_a(y)$  .

إذن :  $x = \log_a(\alpha)$  و  $y = \log_a(\beta)$  و  $\alpha > 0$  و  $\beta > 0$  .

ومنه فإن :  $\log_a(\alpha\beta) = \log_a(\alpha) + \log_a(\beta) = x + y$  و  $\alpha\beta > 0$  .

إذن :  $\exp_a(x + y) = \alpha\beta = \exp_a(x)\exp_a(y)$  ...

قاعدة التحويل تصير :  $\forall x \in ]0, +\infty[ ; \forall y \in \mathbb{R} : \log_a(x) = y \Leftrightarrow x = a^y$

**مثال :** لدينا :  $3^x = 2 \Leftrightarrow x = \log_3(2) = \frac{\ln 2}{\ln 3}$

$$3^x = 2 \Leftrightarrow \ln(3^x) = \ln(2)$$

$$\Leftrightarrow x \ln(3) = \ln(2)$$

لاحظ أن :

$$\Leftrightarrow x = \frac{\ln 2}{\ln 3}$$

$$3^x = 2 \Leftrightarrow x = \log_3(2)$$

**5. كتابة جديدة لـ  $\exp_a(x)$  :**

أ- ليكن  $a > 0$  و  $a \neq 1$  . ليكن  $x \in \mathbb{R}$  . نضع :  $y = \exp_a(x)$  . إذن :

$$y = \exp_a(x) \Leftrightarrow x = \log_a(y)$$

$$\Leftrightarrow x = \frac{\ln y}{\ln a}$$

$$\Leftrightarrow x \ln a = \ln y$$

$$y = \exp_a(x) \Leftrightarrow y = e^{x \ln a}$$

**نتيجة 1 :** لكل  $a > 0$  و  $a \neq 1$  ، لدينا :  $\forall x \in \mathbb{R} : \exp_a(x) = a^x = e^{x \ln a}$

**مثال :** لدينا :  $3^{\sqrt{5}} = e^{\sqrt{5} \ln 3}$  .

$$\forall x \in \mathbb{R} : a^x = e^{x \ln a}$$

**ب- نتيجة 2 :** لكل  $a > 0$  ، لدينا :

لاحظ أنه تم تمديد النتيجة 1 بإضافة الحالة  $a = 1$  .

**6. مشتقة الدالة  $\exp_a(x)$  حيث  $a > 0$  و  $a \neq 1$  :**

ليكن  $x \in \mathbb{R}$  ، لدينا :  $\exp_a'(x) = (e^{x \ln a})' = (x \ln a)' e^{x \ln a} = (\ln a) e^{x \ln a} = (\ln a) \exp_a(x)$

**نتيجة 1 :**  $\forall x \in \mathbb{R} : \exp_a'(x) = \ln(a) \exp_a(x)$

**نتيجة 2 :**  $\forall x \in \mathbb{R} : (a^x)' = \ln(a) \times a^x$

**مثال :** لدينا :  $\forall x \in \mathbb{R} : (2^x)' = (\ln 2) \times 2^x > 0$  .

#### IV. تمارين تطبيقية :

##### تمرين تطبيقي رقم 1 :

نعتبر  $f$  الدالة العددية للمتغير الحقيقي  $x$  المعرفة بما يلي :

$$\begin{cases} f(x) = (x-1)e^{\frac{1}{x-1}} & ; x < 1 \\ f(x) = x-1 - \frac{\ln(x)}{x} & ; x \geq 1 \end{cases}$$

1. أ- أحسب  $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x)$  و  $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$  .

ب- بين أن  $f$  متصلة في 1 .

2. أ- أدرس قابلية اشتقاق  $f$  في 1 .

ب- بين أن  $\forall x \in ]-\infty, 1[ : f'(x) = \frac{x-2}{x-1} e^{\frac{1}{x-1}}$  .

ج- تحقق من أن  $f$  تزايدية قطعاً على المجال  $]1, +\infty[$  .

د- أعط جدول تغيرات الدالة  $f$  .

3. أ- تحقق من أن المستقيم  $y = x - 1$  : (D) مقارب للمنحنى  $(\mathcal{C}_f)$  بجوار  $+\infty$  ، ثم أدرس

الوضع النسبي للمنحنى  $(\mathcal{C}_f)$  والمستقيم (D) .

ب- بين أن :  $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) - x = 0$  .

4. أنشئ المنحنى  $(\mathcal{C}_f)$  .

**الحل :**

1. أ- لدينا :  $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} (x-1)e^{\frac{1}{x-1}} = -\infty$  و  $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} x-1 - \frac{\ln x}{x} = +\infty$  .

ب- دراسة اتصال الدالة  $f$  في 1 :

$$\lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^+} x-1 - \frac{\ln x}{x} = 0 = f(1) \quad \text{لدينا :}$$

و لدينا :  $\lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^-} (x-1)e^{\frac{1}{x-1}} = \lim_{t \rightarrow -\infty} \frac{1}{t} \times e^t = 0 = f(1)$  وذلك بوضع  $t = \frac{1}{x-1}$  .

إذن :  $\lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = f(1)$  ومنه فإن  $f$  متصلة في 1 .

2. أ- دراسة قابلية اشتقاق الدالة  $f$  في 1 :

$$\lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{f(x) - f(1)}{x-1} = \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{x-1 - \frac{\ln x}{x}}{x-1} = \lim_{x \rightarrow 1^+} 1 - \frac{\ln x}{x-1} \times \frac{1}{x} = 1 - 1 = 0 \quad \text{لدينا :}$$

$f$  قابلة للاشتقاق على اليمين في 1 و  $f'_d(1) = 0$  . ومنه فإن المنحنى  $(\mathcal{C}_f)$  يقبل نصف

مماس أفقي  $(T_d)$  على اليمين في النقطة ذات الأفصول 1 معادلته :

$$(T_d) : \begin{cases} y = 0 \\ x \geq 1 \end{cases} \quad \text{أي :} \quad \begin{cases} y = f'_d(1)(x-1) + f(1) \\ x \geq 1 \end{cases}$$

ولدينا :  $\lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{f(x) - f(1)}{x-1} = \lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{(x-1)e^{\frac{1}{x-1}}}{x-1} = \lim_{x \rightarrow 1^-} e^{\frac{1}{x-1}} = \lim_{t \rightarrow -\infty} e^t = 0$  حيث  $t = \frac{1}{x-1}$  .

إذن :  $f$  قابلة للاشتقاق على اليسار في 1 و  $f'_g(1) = 0$  . ومنه فإن المنحنى  $(\mathcal{C}_f)$  يقبل نصف

مماس أفقي ( $T_g$ ) على اليسار في النقطة ذات الأفصول 1 معادلته :

$$(T_g) : \begin{cases} y = 0 \\ x \leq 1 \end{cases} \text{ أي : } \begin{cases} y = f'_g(1)(x-1) + f(1) \\ x \leq 1 \end{cases}$$

وبما أن  $f'_g(1) = f'_d(1) = 0$  ، فإن  $f$  قابلة للاشتقاق في 1 و  $f'(1) = 0$  .

ومنه نستنتج أن للمنحنى ( $\mathcal{C}_f$ ) مماس أفقي ( $T$ ) في النقطة ذات الأفصول 1 معادلته :

$$(T) : \begin{cases} y = 0 \end{cases} \text{ أي : } y = f'(1)(x-1) + f(1)$$

ب- ليكن  $x \in ]-\infty, 1[$  ، لدينا :

$$\begin{aligned} f'(x) &= \left( (x-1)e^{\frac{1}{x-1}} \right)' = (x-1)' e^{\frac{1}{x-1}} + (x-1) \left( e^{\frac{1}{x-1}} \right)' = e^{\frac{1}{x-1}} + (x-1) \left( \frac{1}{x-1} \right)' e^{\frac{1}{x-1}} \\ &= e^{\frac{1}{x-1}} \left[ 1 + (x-1) \left( -\frac{(x-1)'}{(x-1)^2} \right) \right] \\ &= e^{\frac{1}{x-1}} \left[ 1 - \frac{1}{x-1} \right] \end{aligned}$$

$$f'(x) = \left( \frac{x-2}{x-1} \right) e^{\frac{1}{x-1}}$$

ج- ليكن  $x \in ]1, +\infty[$  ، لدينا :

$$\begin{aligned} f'(x) &= \left( x - 1 - \frac{\ln x}{x} \right)' = 1 - 0 - \frac{(\ln x)' x - (\ln x) x'}{x^2} \\ &= 1 - \frac{\frac{1}{x} \times x - \ln x}{x^2} = 1 - \frac{1 - \ln x}{x^2} = \frac{x^2 - 1 + \ln x}{x^2} \\ f'(x) &= \frac{(x-1)(x+1) + \ln x}{x^2} \end{aligned}$$

لدينا  $x > 1$  . إذن :  $\ln x > 0$  و  $x+1 > 0$  و  $x-1 > 0$  و  $x^2 > 0$  . إذن :  $f'(x) > 0$  .

وبالتالي فإن :  $f$  تزايدية قطعاً على المجال  $]1, +\infty[$  .

د- ليكن  $x \in ]-\infty, 1[$  ، لدينا :  $f'(x) = \left( \frac{x-2}{x-1} \right) e^{\frac{1}{x-1}}$  ،

و بما أن  $\frac{x-2}{x-1} > 0 \Rightarrow \begin{cases} x-1 > 0 \\ x-2 < -1 < 0 \end{cases} \Rightarrow x < 1$  و  $e^{\frac{1}{x-1}} > 0$  ،

فإن :  $f'(x) > 0$  :  $\forall x \in ]-\infty, 1[$  . ومنه نستنتج أن  $f$  تزايدية قطعاً على المجال  $]-\infty, 1[$  .



### جدول تغيرات الدالة $f$ :

$x$	$-\infty$	1	$+\infty$
$f'(x)$	+	0	+
$f(x)$	$-\infty$		$+\infty$

3. أ- لدينا :  $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) - (x-1) = \lim_{x \rightarrow +\infty} -\frac{\ln x}{x} = 0$  . إذن  $(\mathcal{E}_f)$  يقبل مقارباً مائلاً  $(D)$  بجوار

$+\infty$  معادلته  $y = x - 1$  .

دراسة الوضع النسبي للمنحنى  $(\mathcal{E}_f)$  والمستقيم  $(D)$  :

ليكن  $x \in ]1, +\infty[$  . لدينا :  $f(x) - (x-1) = -\frac{\ln x}{x} < 0$  . إذن  $(\mathcal{E}_f)$  يوجد تحت  $(D)$  على المجال  $]1, +\infty[$  .

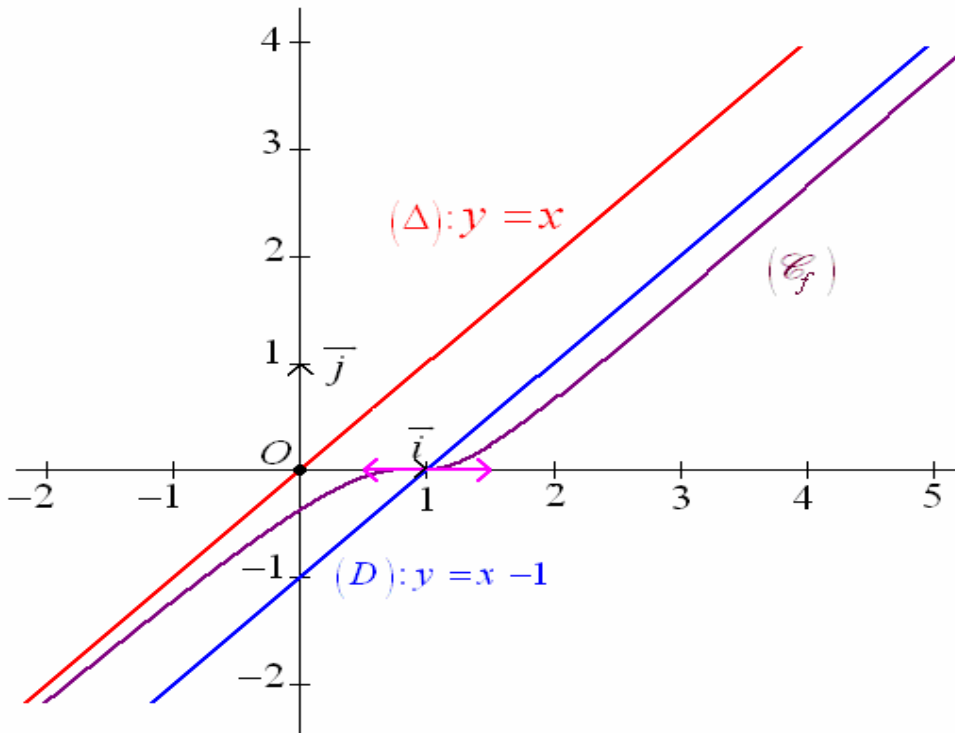
ب- لدينا :  $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) - x = \lim_{x \rightarrow +\infty} (x-1)e^{\frac{1}{x-1}} - x = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{e^t}{t} - \left(\frac{1}{t} + 1\right)$

$$= \lim_{t \rightarrow 0} \frac{e^t - 1}{t} - 1 = 1 - 1 = 0$$

وذلك بوضع  $t = \frac{1}{x-1}$  حيث  $t \rightarrow 0$  .

ومنه نستنتج أن المستقيم  $(\Delta)$  ذو المعادلة  $y = x$  مقارب مائل للمنحنى  $(\mathcal{E}_f)$  بجوار  $-\infty$  .

4. إنشاء المنحنى  $(\mathcal{E}_f)$  :



## تمرين تطبيقي رقم 2 :

نعتبر الدالة العددية للمتغير الحقيقي  $x$  المعرفة بما يلي :

$$\begin{cases} f(x) = \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x & ; x \neq 0 \\ f(0) = 1 \end{cases}$$

**الجزء الأول :** لتكن  $g$  الدالة العددية للمتغير الحقيقي  $x$  المعرفة بما يلي :

$$g(x) = \ln\left(1 + \frac{1}{x}\right) - \frac{1}{x+1}$$

1. حدد  $\mathcal{D}_g$  حيز تعريف الدالة  $g$  .
2. أحسب نهايات  $g$  عند محداث  $\mathcal{D}_g$  .
3. حدد  $g'(x)$  لكل  $x$  من  $\mathcal{D}_g$  ، ثم أعط جدول تغيرات الدالة  $g$  .
4. استنتج أن :  $g(x) > 0$  :  $\forall x \in \mathcal{D}_g$  .

## الجزء الثاني :

1. حدد  $\mathcal{D}_f$  حيز تعريف الدالة  $f$  .
2. أحسب نهايات  $f$  عند محداث  $\mathcal{D}_f$  ، وأول النتائج المحصلة هندسيا .
3. أدرس اتصال الدالة  $f$  على اليمين في 0 .
4. أدرس قابلية اشتقاق الدالة  $f$  على اليمين في 0 ، وأول النتائج المحصلة هندسيا .
5. حدد  $f'(x)$  لكل  $x$  من  $\mathcal{D}_f - \{0\}$  ، ثم أعط جدول تغيرات الدالة  $f$  .
6. أنشئ المنحنى  $(\mathcal{C}_f)$  .

## الحل :

### الجزء الأول :

1. حيز تعريف الدالة  $g$  :  $\mathcal{D}_g = \left\{x \in \mathbb{R} \mid 1 + \frac{1}{x} > 0 \text{ و } x \neq 0\right\}$

$x$	$-\infty$	$-1$	$0$	$+\infty$
$x+1$	$-$	$0$	$+$	$+$
$x$	$-$	$-$	$0$	$+$
$\frac{x+1}{x}$	$+$	$-$		$+$

وبالتالي فإن :  $\mathcal{D}_g = ]-\infty, -1[ \cup ]0, +\infty[$  .

2. نهايات الدالة  $g$  عند محداث  $\mathcal{D}_g$  :

لدينا :  $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} g(x) = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \ln\left(1 + \frac{1}{x}\right) - \frac{1}{x+1} = \ln 1 - 0 = \boxed{0}$

و لدينا :  $\lim_{x \rightarrow 0^+} g(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} \ln\left(1 + \frac{1}{x}\right) - \frac{1}{x+1} = +\infty - 1 = \boxed{+\infty}$  لأن :  $\lim_{x \rightarrow 0^+} 1 + \frac{1}{x} = +\infty$

نضع  $t = 1 + \frac{1}{x} = \frac{x+1}{x}$  . إذن :  $t \rightarrow 0^+$  و  $x = \frac{1}{t-1}$  . ومنه فإن :  $x+1 = \frac{1}{t-1} + 1 = \frac{t}{t-1}$  و :

$$\lim_{x \rightarrow (-1)^-} g(x) = \lim_{x \rightarrow (-1)^-} \ln\left(1 + \frac{1}{x}\right) - \frac{1}{x+1} = \lim_{t \rightarrow 0^+} \ln t - \frac{t-1}{t} = \lim_{t \rightarrow 0^+} \frac{t \ln t - t + 1}{t} = \boxed{+\infty}$$

3. ليكن  $x$  من  $\mathcal{D}_g$  ، لدينا :

$$g'(x) = \left( \ln\left(1 + \frac{1}{x}\right) - \frac{1}{x+1} \right)' = \frac{\left(1 + \frac{1}{x}\right)'}{1 + \frac{1}{x}} - \left( -\frac{(x+1)'}{(x+1)^2} \right) = \frac{-\frac{1}{x^2}}{\frac{x+1}{x}} + \frac{1}{(x+1)^2}$$

$$= -\frac{1}{x(x+1)} + \frac{1}{(x+1)^2} = \frac{-(x+1) + x}{x(x+1)^2}$$

$$g'(x) = \boxed{\frac{-1}{x(x+1)^2}}$$

إشارة  $g'(x)$  على  $\mathcal{D}_g$  هي إشارة  $(-x)$  ، ومنه نستنتج جدول تغيرات الدالة  $g$  كما يلي :

$x$	$-\infty$	$-1$	$0$	$+\infty$
$g'(x)$	+			-
$g(x)$	0 ↗ $+\infty$		$+\infty$ ↘ 0	

4. لدينا :  $g$  متصلة وتزايدية قطعاً على المجال  $]-\infty, -1[$  . إذن :

$$g(]-\infty, -1[) = \left[ \lim_{x \rightarrow -\infty} g(x), \lim_{x \rightarrow (-1)^-} g(x) \right[ = ]0, +\infty[$$

ولدينا :  $g$  متصلة وتناقصية قطعاً على المجال  $]0, +\infty[$  . إذن :

$$g(]0, +\infty[) = \left[ \lim_{x \rightarrow +\infty} g(x), \lim_{x \rightarrow 0^+} g(x) \right[ = ]0, +\infty[$$

وبالتالي فإن :  $g(x) > 0$  :  $\forall x \in ]-\infty, -1[ \cup ]0, +\infty[$  .

الجزء الثاني :

$$1. \text{ حيز تعريف الدالة } f : \mathcal{D}_f = \left\{ x \in \mathbb{R} \mid 1 + \frac{1}{x} > 0 \text{ و } x \neq 0 \right\} \cup \{0\}$$

$$= ]-\infty, -1[ \cup ]0, +\infty[ \cup \{0\}$$

$$\mathcal{D}_f = ]-\infty, -1[ \cup ]0, +\infty[$$

2. حساب نهايات  $f$  عند محداث  $\mathcal{D}_f$  :

$$\text{لدينا : } \lim_{x \rightarrow \pm\infty} g(x) = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} e^{x \ln\left(1 + \frac{1}{x}\right)} = \lim_{t \rightarrow 0} e^{\frac{\ln(1+t)}{t}} = \boxed{e}$$

، حيث  $t = \frac{1}{x}$  ،  $t \rightarrow 0$  . إذن  $(\mathcal{E}_f)$  يقبل مقاربا أفقيا بجوار  $\pm\infty$  معادلته  $\boxed{y=e}$  .

وبوضع  $t = x \ln\left(1 + \frac{1}{x}\right)$  ، نجد  $t \rightarrow +\infty$  لأن  $\lim_{x \rightarrow (-1)^-} 1 + \frac{1}{x} = 0^+$  و  $\lim_{t \rightarrow 0^+} \ln t = -\infty$  .

$$\text{إذن : } \lim_{x \rightarrow (-1)^-} g(x) = \lim_{x \rightarrow (-1)^-} \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x = \lim_{x \rightarrow (-1)^-} e^{x \ln\left(1 + \frac{1}{x}\right)} = \lim_{t \rightarrow +\infty} e^t = \boxed{+\infty}$$

ومنه فإن  $(\mathcal{E}_f)$  يقبل مقاربا عموديا معادلته  $\boxed{x=-1}$  .

3. دراسة اتصال الدالة  $f$  على اليمين في 0 .

نضع :  $t = \frac{1}{x}$  . إذن :  $t \rightarrow 0^+$  ، ومنه فإن :

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) &= \lim_{x \rightarrow 0^+} \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x = \lim_{x \rightarrow 0^+} e^{x \ln\left(1 + \frac{1}{x}\right)} \\ &= \lim_{t \rightarrow +\infty} e^{\frac{\ln(1+t)}{t}} = \lim_{t \rightarrow +\infty} e^{\frac{\ln\left(t\left(1 + \frac{1}{t}\right)\right)}{t}} \\ &= \lim_{t \rightarrow +\infty} e^{\frac{\ln t + \ln\left(1 + \frac{1}{t}\right)}{t}} = \lim_{t \rightarrow +\infty} e^{\frac{\ln t}{t} + \frac{1}{t} \ln\left(1 + \frac{1}{t}\right)} = e^0 = \boxed{1} \\ \lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) &= 1 = f(0) \end{aligned}$$

وبالتالي فإن الدالة  $f$  متصلة على اليمين في 0 .

4. دراسة قابلية اشتقاق الدالة  $f$  على اليمين في 0 :

$$\text{لدينا : } \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{e^{x \ln\left(1 + \frac{1}{x}\right)} - 1}{x} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{e^{x \ln\left(1 + \frac{1}{x}\right)} - 1}{x \ln\left(1 + \frac{1}{x}\right)} \times \ln\left(1 + \frac{1}{x}\right)$$

نضع :  $t = x \ln\left(1 + \frac{1}{x}\right)$  . نعلم أن :  $t \rightarrow 0$  :

$$\left( \lim_{x \rightarrow 0^+} t = \lim_{x \rightarrow 0^+} x \ln\left(1 + \frac{1}{x}\right) = \lim_{u \rightarrow +\infty} \frac{\ln(1+u)}{u} = \lim_{u \rightarrow +\infty} \frac{\ln u}{u} + \frac{1}{u} \ln\left(\frac{1}{u} + 1\right) = 0, u = \frac{1}{x} \text{ بوضع } \right)$$

$$\text{إذن : } \lim_{x \rightarrow 0^+} \ln\left(1 + \frac{1}{x}\right) = +\infty \text{ ، ولدينا : } \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{e^{x \ln\left(1 + \frac{1}{x}\right)} - 1}{x \ln\left(1 + \frac{1}{x}\right)} = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{e^t - 1}{t} = 1$$

$$\text{ومنه نستنتج أن : } \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = 1 \times +\infty = \boxed{+\infty}$$

وبالتالي فإن  $f$  غي رقابلة للاشتقاق على اليمين في 0 .

**تأويل هندسي :** ( $\mathcal{E}_f$ ) يقبل نصف مماس رأسي على يمين النقطة ذات الأفصول 0 موجه نحو الأعلى .

5. ليكن  $x$  عنصرا من  $\mathcal{D}_f - \{0\}$  ، لدينا :

$$\begin{aligned} f'(x) &= \left( e^{x \ln \left( 1 + \frac{1}{x} \right)} \right)' \\ &= \left( x \ln \left( 1 + \frac{1}{x} \right) \right)' e^{x \ln \left( 1 + \frac{1}{x} \right)} \\ &= \left[ x' \ln \left( 1 + \frac{1}{x} \right) + x \left( \ln \left( 1 + \frac{1}{x} \right) \right)' \right] e^{x \ln \left( 1 + \frac{1}{x} \right)} \\ &= \left[ \ln \left( 1 + \frac{1}{x} \right) + x \frac{\left( 1 + \frac{1}{x} \right)'}{1 + \frac{1}{x}} \right] e^{x \ln \left( 1 + \frac{1}{x} \right)} \\ &= \left[ \ln \left( 1 + \frac{1}{x} \right) + x \frac{-\frac{1}{x^2}}{\frac{x+1}{x}} \right] e^{x \ln \left( 1 + \frac{1}{x} \right)} \\ f'(x) &= \left[ \ln \left( 1 + \frac{1}{x} \right) - \frac{1}{x+1} \right] e^{x \ln \left( 1 + \frac{1}{x} \right)} \end{aligned}$$

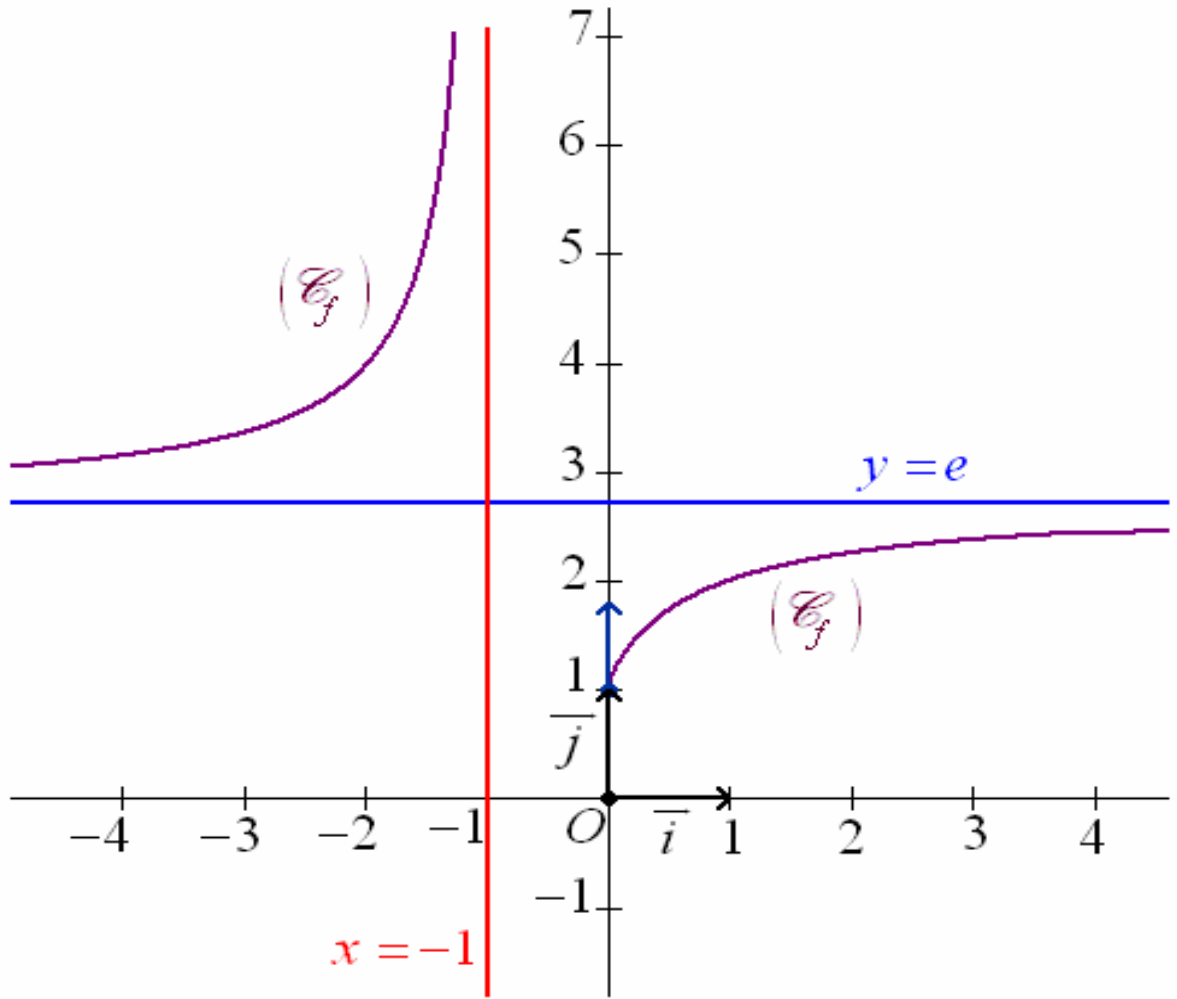
$$f'(x) = g(x) e^{x \ln \left( 1 + \frac{1}{x} \right)}$$

وحسب السؤال 4 من الجزء الأول ، لدينا :  $f'(x) > 0$  :  $\forall x \in ]-\infty, -1[ \cup ]0, +\infty[$  .

**جدول تغيرات الدالة  $f$  :**

$x$	$-\infty$	$-1$	$0$	$+\infty$
$f'(x)$	+		$+\infty$	+
$f(x)$	$e$		$1$	$e$

6. إنشاء المنحنى  $(\mathcal{C}_f)$  :



بالتوفيق إنشاء الله



تم نشر هذا الملف بواسطة قرص **تجربتي** مع الباكالوريا

[tajribatybac@gmail.com](mailto:tajribatybac@gmail.com)

[facebook.com/tajribaty](https://facebook.com/tajribaty)

[jjel.tk/bac](http://jjel.tk/bac)