

بسم الله الرحمن الرحيم

والصلاة والسلام على أشرف المخلوقين محمد سيد المرسلين وعلى آله وصحبه أجمعين
أما بعد ، يسرني أن أقدم لكم هذا العمل المتواضع وهو عبارة على جميع دروس وتمارين
الرياضيات لمستوى الثانية بكالوريا علوم تجريبية مجمعة في كتاب واحد مفهرس
لتصفح أي درس أضغط على عنوانه في الفهرس وكذلك التمارين
وللرجوع إلى الفهرس أضغط على

تجميع وترتيب وفهرست

ALMOHANNAD

عضو بمنتديات دفاتر

الفهرس

التمارين	النهايات والاتصال
ذ. محمد الحيان	ذ. محمد الرقية
التمارين	الاشتقاق
ذ. محمد مستولي	ذ. محمد الرقية
التمارين	دراسة دالة
ذ. الزغداني	ذ. محمد الرقية
التمارين	المتتاليات العددية
ذ. عبد الرحيم الأصب	ذ. محمد الرقية و ذ. محمد مستولي
التمارين	الدوال الأصلية
ذ. محمد مستولي	ذ. محمد الرقية
التمارين	الدالة اللوغاريتمية
ذ. محمد مستولي	ذ. محمد الرقية
التمارين	الأعداد العقدية الجزء الأول
ذ. الزغداني	ذ. محمد الرقية
التمارين	الدوال الأسية
ذ. محمد مستولي	ذ. محمد الرقية
التمارين	الدوال الأسية للأساس a
ذ. محمد مستولي	ذ. محمد الرقية
التمارين	التكامل
ذ. محمد مستولي	ذ. محمد مستولي
التمارين	المعادلات التفاضلية
ذ. توفيق بنعمرو	ذ. محمد مستولي
التمارين	الأعداد العقدية الجزء الثاني
ذ. توفيق بنعمرو	ذ. محمد الرقية
التمارين	الجداء السلمي
ذ. محمد مستولي	ذ. محمد الرقية
التمارين	الفلكة
ذ. محمد مستولي	ذ. محمد الرقية
التمارين	الجداء المتجهي
ذ. محمد مستولي	ذ. محمد الرقية
التمارين	التعداد
ذ. جناح	ذ. محمد الرقية
التمارين	الاحتمالات
ذ. جناح	ذ. محمد الرقية

النهايات والاتصال

-I أنشطة :

1- أحسب النهايات التالية :

$$\begin{aligned} \bullet \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^3 - 1}{x - 1} &= \lim_{x \rightarrow 1} \frac{(x-1)(x^2 + x + 1)}{x - 1} \\ &= \lim_{x \rightarrow 1} x^2 + x + 1 \\ &= 3 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \bullet \lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^2 + 3x - 10}{3x^2 - 5x - 2} &= \lim_{x \rightarrow 2} \frac{(x-2)(x+5)}{3(x-2)\left(x + \frac{1}{3}\right)} \\ &= \lim_{x \rightarrow 2} \frac{x+5}{3\left(x + \frac{1}{3}\right)} \\ &= 1 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \bullet \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{1+x} - 1}{x} &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{(\sqrt{1+x} - 1)(\sqrt{1+x} + 1)}{x(\sqrt{1+x} + 1)} \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{(1+x) - 1}{x(\sqrt{1+x} + 1)} \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x}{x(\sqrt{1+x} + 1)} \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{\sqrt{1+x} + 1} \\ &= \frac{1}{2} \end{aligned}$$

$$\bullet \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{x^2 + p^2} - p}{\sqrt{x^2 + q^2} - q} \quad \text{مع : } 0 < p \text{ و } 0 < q$$

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{x^2 + p^2} - p}{\sqrt{x^2 + q^2} - q} &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{(x^2 + p^2 - p^2)(\sqrt{x^2 + q^2} + q)}{(x^2 + q^2 - q^2)(\sqrt{x^2 + p^2} + p)} \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{(\sqrt{x^2 + q^2} + q)}{(\sqrt{x^2 + p^2} + p)} \\ &= \frac{2q}{2p} \end{aligned}$$

$$= \frac{q}{p}$$

$$\bullet \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1+2+\dots+n}{n^2}$$

$$S = 1+2+\dots+n$$

لنحسب :

$$S = n+(n-1)+(n-2)+\dots+1$$

$$2S = \underbrace{(n+1)+(n-1)+\dots+(n-1)}_{n \text{ terms}}$$

$$2S = n(n+1)$$

$$S = \frac{n(n+1)}{2}$$

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1+2+\dots+n}{n^2} = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{\frac{1}{2}n(n+1)}{n^2}$$

إذن :

$$= \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{2} \frac{n^2}{n^2}$$

$$= \frac{1}{2}$$

$$\bullet \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 3x}{x}$$

تذكير :

$$\lim_{X \rightarrow 0} \frac{\sin X}{X} = 1$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 3x}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 3x}{3x} \times 3$$

$$= \lim_{X \rightarrow 0} \frac{\sin X}{X} \times 3 = 3$$

$$\bullet \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\tan x}{4x}$$

تذكير :

$$\lim_{X \rightarrow 0} \frac{\tan X}{X} = 1$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\tan x}{4x} = \frac{1}{4}$$

$$\bullet \lim_{x \rightarrow +\infty} \sqrt{x^2+1} - \sqrt{x^2-1} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{(\sqrt{x^2+1} - \sqrt{x^2-1})(\sqrt{x^2+1} + \sqrt{x^2-1})}{\sqrt{x^2+1} + \sqrt{x^2-1}}$$

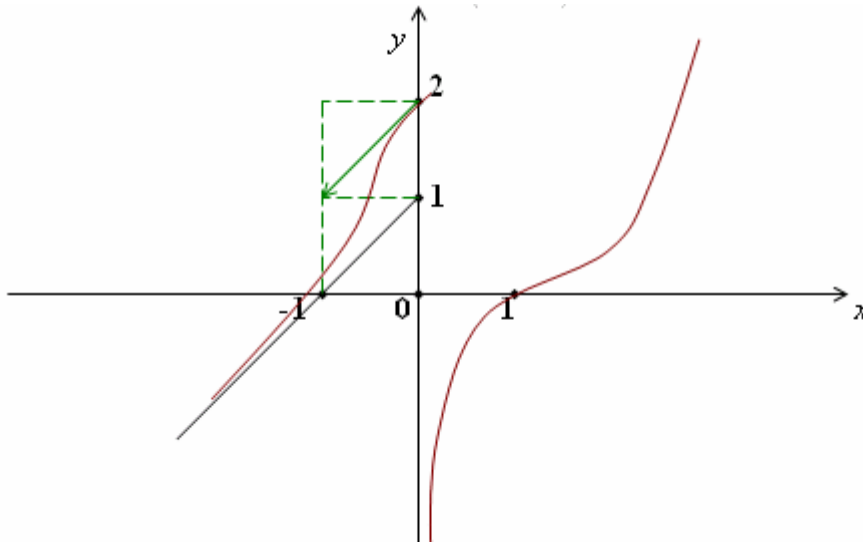
$$= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{(x^2+1) - (x^2-1)}{\sqrt{x^2+1} + \sqrt{x^2-1}}$$

$$= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2}{\sqrt{x^2+1} + \sqrt{x^2-1}}$$

$$= \frac{2}{+\infty} = 0$$

2- ليكن المنحنى الممثل للدالة f في م.م.م. (O, \vec{i}, \vec{j}) .

• حدد D_f .



• حدد النهايات التالية :

$$* \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x)$$

$$* \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$$

$$* \lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x < 0}} f(x)$$

$$* \lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x > 0}} f(x)$$

$$* \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{f(x)}{x}$$

$$* \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) - x$$

$$* \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x}$$

$$* \lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x < 0}} \frac{f(x) - 2}{x}$$

الجواب :

$$D_f =]-\infty; 1[\cup]0; 2[\cup]2; +\infty[$$

$$* \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$$

$$* \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = -\infty$$

$$* \lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x > 0}} f(x) = \infty$$

$$* \lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x < 0}} f(x) = 2$$

$$* \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{f(x)}{x} = 1$$

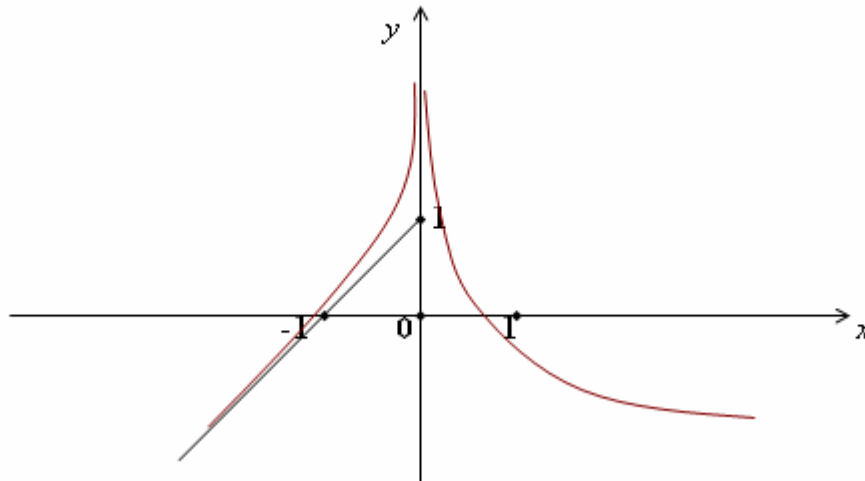
$$* \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) - x = 1$$

$$* \lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x < 0}} \frac{f(x) - 2}{x} = 1$$

$$* \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x} = +\infty$$

(لأن ℓ_f يقبل فرعاً شلجياً في اتجاه محور الأرتيب).

3- ليكن (ℓ_f) المنحنى الممثل للدالة f في معلم متعامد ممنظم.



• حدد D_f .

• حدد النهايات التالية :

$$* \lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x < 0}} f(x)$$

$$* \lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x > 0}} f(x)$$

$$* \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x)$$

$$* \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$$

• هل f متصلة في 0 ؟

• حدد :

$$* \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{f(x)}{x}$$

$$* \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) - x$$

$$* \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x}$$

• أعط جدول تغيرات f ، ثم جدول تغيرات الدالة $g = |f|$.

الجواب :

$$D_f =]-\infty, 0[\cup]0, +\infty[\subset \mathbb{R}$$

$$* \lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x < 0}} f(x) = +\infty$$

$$* \lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x > 0}} f(x) = +\infty$$

$$* \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = -\infty$$

$$* \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = -\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = +\infty$$

• f ليست متصلة لأن :

$$* \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{f(x)}{x} = 1$$

$$* \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) - x = 1$$

$$* \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x} = 0$$

x	$-\infty$	0	$+\infty$
$f(x)$	$-\infty$	$+\infty$	$-\infty$

x	$-\infty$	-1	0	1	$+\infty$
$f(x)$	$+\infty$	$+\infty$	$+\infty$	$+\infty$	$+\infty$
		0		0	

-4 حدد مجموعة تعريف الدوال التالية :

$$\bullet f(x) = \sqrt{|x|(x^2 - 1)}$$

$$D_f = \{x \in \mathbb{R} \mid |x|(x^2 - 1) \geq 0\}$$

x	$-\infty$	-1	0	1	$+\infty$
$x^2 - 1$	+	-	-	+	
$ x $	+	+	+	+	+
$ x (x^2 - 1)$	+	-	-	+	

$$D_f =]-\infty, -1] \cup [1, +\infty[\setminus \{0\}$$

$$\bullet f(x) = \sqrt{\frac{1}{x} - x^2}$$

$$D_f = \{x \in \mathbb{R} \mid x \neq 0 \text{ و } \frac{1}{x} - x^2 \geq 0\}$$

$$\begin{aligned} \frac{1}{x} - x^2 &= \frac{1 - x^3}{x} \\ &= \frac{(1+x)(1-x-x^2)}{x} \end{aligned}$$

x	$-\infty$	0	1	$+\infty$
$1-x$		+	+	-
x		-	+	+
$\frac{1-x}{x}$		-	+	-

$$D_f =]0,1]$$

5- لتكن f الدالة العددية المعرفة بما يلي :

$$f(x) = \frac{1 - \cos(x-1)}{(x-1)^2}$$

- حدد D_f .
- بين أنه يمكن تمديد f باتصال في 1.
- ليكن g هذا التمديد بالاتصال، حدد D_g ، ثم أحسب نهايات g عند محددات D_g .

الأجوبة :

$$D_f = \mathbb{R} \setminus \{1\}$$

• لنحسب $\lim_{x \rightarrow 1} f(x)$

$$\lim_{x \rightarrow 1} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{1 - \cos(x-1)}{(x-1)^2}$$

نضع : $X = x-1$

$$(x \rightarrow 1) \Leftrightarrow (X \rightarrow 0)$$

$$\lim_{x \rightarrow 1} f(x) = \lim_{X \rightarrow 0} \frac{1 - \cos X}{X^2} = \frac{1}{2} \in \mathbb{R} \quad \text{إذن :}$$

إذن : f تقبل تمديد باتصال في 1.

وهذا التمديد هو الدالة g المعرفة بـ :

$$\begin{cases} g(x) = f(x) \\ g(1) = \frac{1}{2} \end{cases} \quad \text{و} \quad x \neq 1$$

$$D_g = \mathbb{R} \quad \bullet$$

لدينا : $\forall x \in \mathbb{R} \quad -1 \leq \cos x \leq 1$

$$\forall x \in \mathbb{R} \quad -1 \leq \cos(x-1) \leq 1$$

$$\forall x \in \mathbb{R} \quad -1 \leq -\cos(x-1) \leq 1$$

$$\forall x \in \mathbb{R} \quad 0 \leq 1 - \cos(x-1) \leq 2$$

$$\forall x \in \mathbb{R} \setminus \{1\} \quad 0 \leq \frac{1 - \cos(x-1)}{(x-1)^2} \leq \frac{2}{(x-1)^2}$$

$$\lim_{|x| \rightarrow +\infty} \frac{2}{(x-1)^2} = 0 \quad \text{وبما أن :}$$

$$\lim_{|x| \rightarrow +\infty} g(x) = 0 \quad \text{إذن :}$$

-6- ليكن k عددا حقيقيا و f دالة معرفة بـ :

$$\begin{cases} f(x) = x^2 + kx - 1 & ; \quad x > -1 \\ f(x) = \frac{x+1}{x-2} & ; \quad x \leq -1 \end{cases}$$

حدد k لكي تكون الدالة f متصلة على \mathbb{R} .

الجواب :

لدينا f متصلة على $]-\infty; -1[$ و $] -1; +\infty[$;

إذن : لكي تكون f ممتصلة على \mathbb{R} يكفي أن تكون متصلة في -1 .
ولهذا يكفي ان تكون :

$$\lim_{\substack{x \rightarrow -1 \\ x < -1}} f(x) = \lim_{\substack{x \rightarrow -1 \\ x > -1}} f(x) = f(-1)$$

$$0 = 2 - k \quad \text{أي :}$$

$$k = 2$$

-7- أحسب النهايتين :

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \sin x \cdot \sin \frac{1}{\sqrt{x}} \quad \text{-a}$$

$$\forall x \in \mathbb{R}_+^* \quad -1 \leq \sin \frac{1}{\sqrt{x}} \leq 1 \quad \text{لدينا :}$$

$$\forall x \in \mathbb{R}_+^* \quad \left| \sin \frac{1}{\sqrt{x}} \right| \leq 1 \quad \text{أي :}$$

$$\forall x \in \mathbb{R}_+^* \quad \left| \sin x \cdot \sin \frac{1}{\sqrt{x}} \right| \leq |\sin x| \quad \text{إذن :}$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} |\sin x| = 0 \quad \text{وبما أن :}$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \left| \sin x \cdot \sin \frac{1}{\sqrt{x}} \right| = 0 \quad \text{فإن :}$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \sin x \cdot \sin \frac{1}{\sqrt{x}} = 0 \quad \text{ومنه :}$$

$$\lim_{|x| \rightarrow +\infty} x^2 (\cos x + 2) \quad \text{-b}$$

$$\forall x \in \mathbb{R} \quad -1 \leq \cos x \leq 1 \quad \text{لدينا :}$$

$$\forall x \in \mathbb{R} \quad 1 \leq \cos x + 2 \leq 3 \quad \text{إذن :}$$

$$\forall x \in \mathbb{R} \quad x^2 \leq x^2 (\cos x + 2) \leq 3x^2 \quad \text{ومنه :}$$

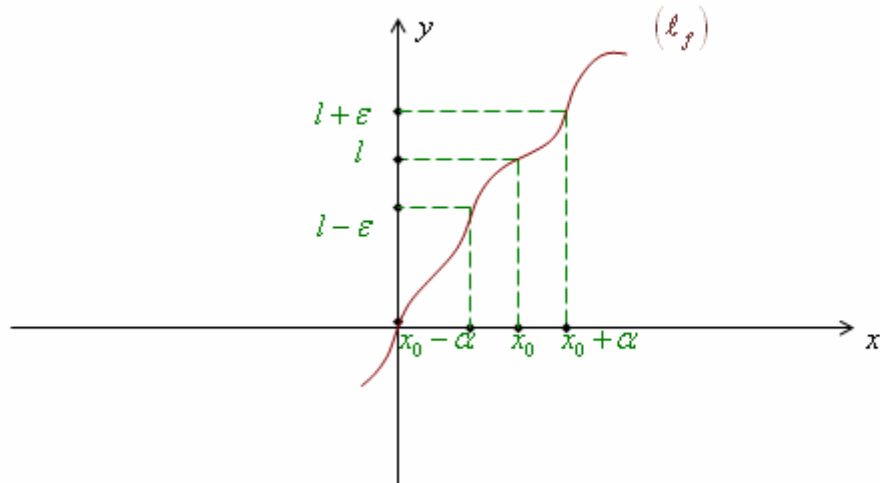
$$\lim_{|x| \rightarrow +\infty} x^2 = +\infty \quad \text{وبما أن :}$$

فإن : $\lim_{|x| \rightarrow +\infty} x^2 (\cos x + 2) = +\infty$

-II تعاريف :

1- النهايات :

لتكن f دالة عددية حيز تعريفها يحتوي على مجال مفتوح منقط مركزه x_0 .
نقول أن نهاية $f(x)$ عندما تؤول x إلى x_0 هي l إذا وفقط إذا كان : كلما اقتربت x من x_0 فإن $f(x)$ تقترب من l .



استنتاج :

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = l \quad / \quad x_0 \in \mathbb{R} ; l \in \mathbb{R}$$

$$\Leftrightarrow (\forall \varepsilon > 0) ; \exists \alpha > 0 \quad / \quad (\forall x \in D_f) ; 0 < |x - x_0| < \alpha \Rightarrow |f(x) - l| < \varepsilon$$

ملاحظات :

$$x_0 \in \mathbb{R} ; l \in \mathbb{R} \quad -1$$

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = +\infty$$

$$\Leftrightarrow (\forall A > 0) ; \exists \alpha > 0 ; (\forall x \in D_f) ; 0 < |x - x_0| < \alpha \Rightarrow f(x) > A$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = l \quad -2$$

$$\Leftrightarrow (\forall \varepsilon > 0) \quad \exists B > 0 ; (\forall x \in D_f) ; x > B \Rightarrow |f(x) - l| < \varepsilon$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty \quad -3$$

$$\Leftrightarrow (\forall A > 0) \quad \exists B > 0 ; (\forall x \in D_f) ; x > B \Rightarrow f(x) > A$$

c العمليات على النهايات :

$$(l \cdot l') \in \mathbb{R}^2$$

$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x)$	$\lim_{x \rightarrow x_0} g(x)$	$\lim_{x \rightarrow x_0} (f + g)(x)$	$\lim_{x \rightarrow x_0} (f \times g)(x)$	$\lim_{x \rightarrow x_0} \left(\frac{f}{g} \right)(x)$
l	l'	$l + l'$	$l \cdot l'$	$\frac{l}{l'} ; l' \neq 0$
$l > 0 ; l$	$+\infty$	$+\infty$	$+\infty$	0
$l > 0 ; l$	$-\infty$	$-\infty$	$-\infty$	0
$-\infty$	$l' ; l' > 0$	$-\infty$	$-\infty$	$-\infty$
$+\infty$	$+\infty$	$+\infty$	$+\infty$	FI
$+\infty$	$-\infty$	FI	$-\infty$	FI
0	$+\infty$	$+\infty$	FI	0
0	0	0	0	FI

الأشكال غير المحددة :

$\frac{\infty}{\infty}$	$\frac{0}{0}$	$0 \times \infty$	$(+\infty)(-\infty) - (+)(-)$
-------------------------	---------------	-------------------	-------------------------------

2- الاتصال

لتكن f دالة عددية حيز تعريفها يحتوي على مجال مفتوح مركزه x_0 ، $x_0 \in \mathbb{R}$

- نقول أن f متصلة في x_0 إذا وفقط إذا كان :

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = f(x_0)$$

- نقول أن f متصلة في x_0 على اليمين إذا وفقط إذا كان :

$$\lim_{x \rightarrow x_0^+} f(x) = f(x_0)$$

- نقول أن f متصلة في x_0 على اليسار إذا وفقط إذا كان :

$$\lim_{x \rightarrow x_0^-} f(x) = f(x_0)$$

التمديد بالاتصال :

لتكن f دالة عددية حيز تعريفها D_f يحتوي على مجال مفتوح منقط مركزه x_0 ، $x_0 \notin D_f$.

نقول أن f تقبل تمديداً باتصال في x_0 إذا وفقط إذا كانت نهاية $f(x)$ عند x_0 منتهية.

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = l \in \mathbb{R}$$

الدالة g المعرفة بـ :

$$\begin{cases} g(x) = f(x) ; x \in D_f \\ g(x_0) = \lim_{x \rightarrow x_0} f(x) \end{cases}$$

تسمى تمديد f باتصال في x_0 .

الاتصال على مجال :

تكون f متصلة على المجال $[a, b]$ إذا وفقط إذا كانت متصلة على $]a, b[$ ومتصلة في a على اليمين وفي b على اليسار.

3- مركب دالتين Composée de 2 fonctionsتمهيد :

نعتبر الدالتين f و g المعرفتين بـ :

$$g(x) = \frac{1}{\sqrt{1+|x|}} \quad \text{و} \quad f(x) = \frac{x-1}{\sqrt{|x^2-1|}}$$

حدد $g \circ f(x)$

أحسب $\lim_{x \rightarrow 1} g \circ f(x)$

الجواب :

$$D_g = \mathbb{R} ; \quad D_f = \mathbb{R} \setminus \{\pm 1\}$$

$$\begin{aligned} g \circ f(x) &= \frac{1}{\sqrt{1+|f(x)|}} \\ &= \frac{1}{\sqrt{1 + \frac{|x-1|}{\sqrt{|x^2-1|}}}} \\ &= \frac{1}{\sqrt{1 + \sqrt{\frac{|x-1|^2}{|x^2-1|}}}} \\ &= \frac{1}{\sqrt{1 + \sqrt{\frac{(x-1)^2}{x^2-1}}}} \\ &= \frac{1}{\sqrt{1 + \sqrt{\frac{x-1}{x+1}}}} \end{aligned}$$

أي : $\lim_{x \rightarrow 1} g \circ f(x) = 1$

حساب $\lim_{x \rightarrow 1} g \circ f(x)$

لدينا : $\lim_{x \rightarrow 1} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x-1}{\sqrt{|x^2-1|}}$

$$= \lim_{x \rightarrow 1} \pm \sqrt{\frac{(x-1)^2}{|x^2-1|}}$$

$$= \lim_{x \rightarrow 1} \pm \sqrt{\frac{x-1}{x+1}} = 0$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} g(x) = g(0) = 1 \quad \text{وبما أن :}$$

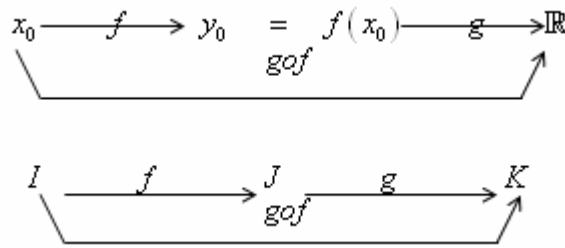
$$\lim_{x \rightarrow 0} g \circ f(x) = 1 \quad \text{فإن :}$$

خاصيات :

1- مركبة دالتين متصلتين هي دالة متصلة.

2- إذا كانت f متصلة في x_0 و g دالة متصلة في $y_0 = f(x_0)$.

فإن : $g \circ f$ متصلة في x_0 .



-3

إذا كانت f متصلة على I و g متصلة على J حيث $f(I) \subset J$

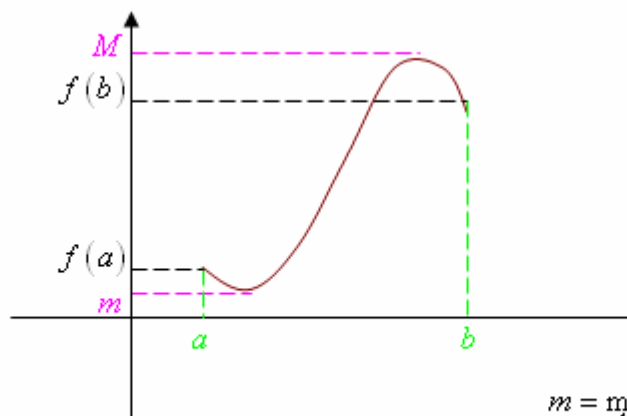
فإن : $g \circ f$ متصلة على I .

إذا كانت f تقبل نهاية في x_0 ، $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = y_0$ و g دالة متصلة في y_0 .

$$\lim_{x \rightarrow x_0} g \circ f(x) = g(y_0) \quad \text{فإن :}$$

4- صورة مجال بدالة متصلة :

متصلة على مجال $[a, b]$.



$$m = \min_{a \leq x \leq b} f(x)$$

$$M = \max_{a \leq x \leq b} f(x)$$

لتكن

نلاحظ أن :

$$\in (\forall y \in [m, M]) (\exists x \in [a, b]) / f(x) = y$$

وهذا يعني أن :

لكل عنصر من المجال $J = [m, M]$ سابق من $I = [a, b]$ ، في هذه الحالة نقول أن f شمولية من I نحو J .

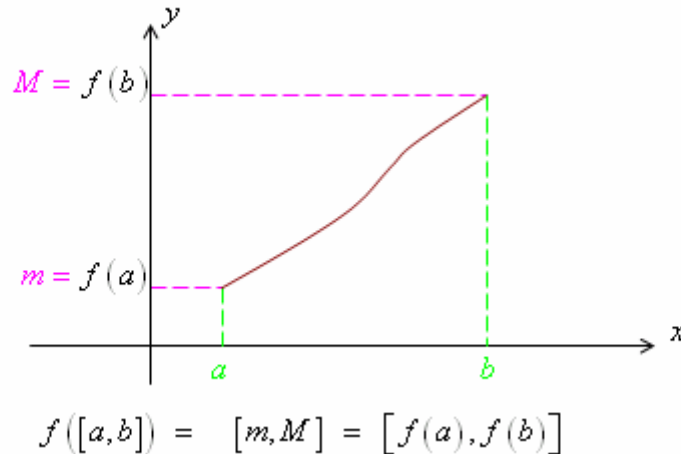
ونكتب : $f([a,b]) = [m,M]$

خاصية :

صورة مجال من \mathbb{R} بدالة متصلة هي مجال من \mathbb{R} .

لتكن f دالة متصلة ورتيبة قطعاً على $[a,b]$.

الحالة ① : f تزايدية قطعاً.



نلاحظ أن :

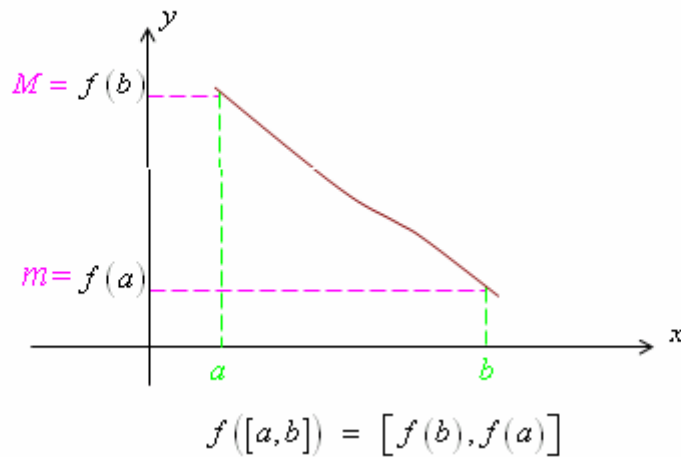
$$(\forall y \in [m,M]) (\exists x \in [a,b]) / f(x) = y$$

وهذا يعني أن :

لكل عنصر من المجال : $J = [m,M]$ سابق وحيد من $I = [a,b]$.

وفي هذه الحالة نقول أن : f تقابل من $I = [a,b]$ نحو المجال $J = [m,M]$.

الحالة ② : f تناقصية قطعاً.



خاصية :

إذا كانت f متصلة ورتيبة قطعاً على المجال $[a,b]$ فإنها تقابل من $[a,b]$ نحو $f([a,b]) = [m,M]$.

تحديد صورة مجال :

• الحالة ① : f تزايدية قطعاً.

I	$J = f(I)$
$[a,b]$	$[f(a) ; f(b)]$

$[a, b[$	$\left[f(a) ; \lim_{\substack{x \rightarrow b \\ x < b}} f(x) \right[$
$]a, b]$	$\left] \lim_{\substack{x \rightarrow a \\ x > a}} f(x) ; f(b) \right]$
$[a, +\infty[$	$\left[f(a) ; \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) \right[$
$] -\infty, +\infty[$	$\left] \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) ; \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) \right[$

• الحالة ② : f تناقصية قطعاً.

I	$f(I)$
$[a, b]$	$[f(b) ; f(a)]$
$[a, b[$	$\left] \lim_{x \rightarrow b} f(x) ; f(a) \right[$
$]a, b]$	$\left[f(b) ; \lim_{x \rightarrow a} f(x) \right[$
$[a, +\infty[$	$\left] \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) ; f(a) \right[$
$] -\infty, b]$	$\left[f(b) ; \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) \right[$
$] -\infty, +\infty[$	$\left] \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) ; \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) \right[$

تطبيق :

حدد صورتي المجالين I و J في الحالات التالية :

• $I =]0, +\infty[$, $J = [0, 2]$ $f(x) = \frac{x-1}{x+1}$

لدينا : f متصلة على $\mathbb{R} \setminus \{-1\}$
وبما أن :

$$f(x) = \frac{x-1}{x+1} = \frac{x+1-2}{x+1} = 1 - \frac{2}{x+1}$$

إذن : f تزايدية قطعاً.

ومنه : $f([0, 2]) = [f(0) ; f(2)] = \left[1 ; \frac{1}{3} \right]$

$$f([0, +\infty[) = \left[f(0) ; \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) \right[= [-1, 1[$$

• $I = [0, \pi]$; $J = \mathbb{R}$; $f(x) = \cos x$

لدينا : f متصلة وتناقصية قطعاً على I .

إذن : $f([0, \pi]) = [f(\pi) ; f(0)] = [-1 ; 1]$

ولدينا : f متصلة على \mathbb{R} .

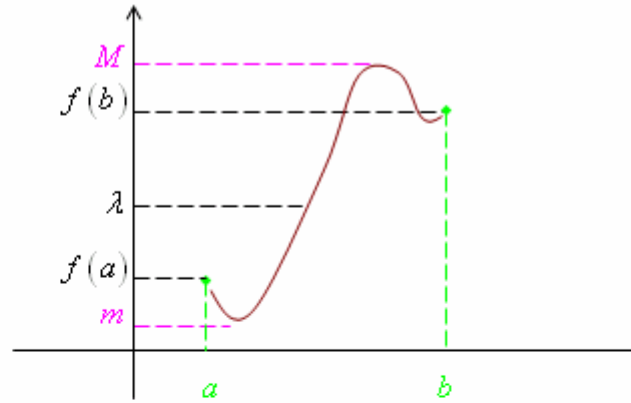
$$f(\mathbb{R}) = [-1; 1]$$

5- مبرهنة القيم الوسطية (T.V.I)

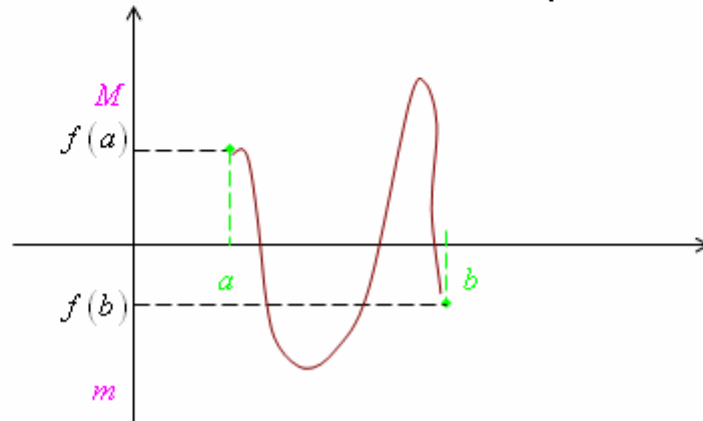
لتكن f دالة متصلة على $[a, b]$ و $f([a, b]) = [m, M]$

لدينا : لكل λ من $[m, M]$ سابق x من $[a, b]$.

وهذا يعني أنه لكل λ من $[m, M]$ المعادلة $f(x) = \lambda$ تقبل حل على الأقل في $[a, b]$.



نفترض أن : $0 < M$ و $m < 0$.



بما أن : $0 \in [m, M]$

فإن المعادلة $f(x) = 0$ تقبل حلا على الأقل في $[a, b]$.

مبرهنة القيم الوسطية :

إذا كانت f متصلة ورتيبة قطعاً على $[a, b]$ و $f(a) \cdot f(b) < 0$

فإن المعادلة $f(x) = 0$ تقبل حلاً وحيداً في المجال $[a, b]$.

تطبيق 1 :

لتكن f دالة متصلة على $[a, b]$ بحيث $f(a) > a$ و $f(b) < b$.

بين أن المعادلة $f(x) = x$ تقبل حلاً على الأقل من المجال $[a, b]$.

الجواب :

نضع : $g(x) = f(x) - x$

بما أن : الدالة f متصلة على $[a, b]$.

فإن : الدالة g متصلة على $[a, b]$.

وبما أن : $g(a) = f(a) - a > 0$

و : $g(b) = f(b) - b < 0$

فإن : $g(a) \cdot g(b) < 0$

ومنه المعادلة $g(x) = 0$ تقبل حلا على الأقل من $[a, b]$.

وبالتالي المعادلة $f(x) = x$ تقبل حلا على الأقل من المجال $[a, b]$.

تطبيق 2 :

بين أن المعادلة $f(x) = 0$ تقبل حلا على الأقل في \mathbb{R} في الحالات التالية :

$$f(x) = x^3 - 1 \quad -1$$

$$f(x) = x^7 + x^2 - 1 \quad -2$$

$$f(x) = 1 + \sin x - x \quad -3$$

الجواب :

1- لدينا : f متصلة على \mathbb{R} .

$$f(0) = -1 \quad \text{و} \quad f(2) = 7$$

$$f(0) \cdot f(2) < 0 \quad \text{إذن :}$$

ومنه : $f(x) = 0$ تقبل حلا على الأقل في \mathbb{R} .

2- لدينا : f متصلة على \mathbb{R} .

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty \quad \text{ولدينا :}$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = -\infty \quad \text{و :}$$

ومنه : المعادلة $f(x) = 0$ تقبل حلا على الأقل في \mathbb{R} .

3- لدينا : f متصلة على \mathbb{R} .

$$f(0) = 1 > 0 \quad \text{و :}$$

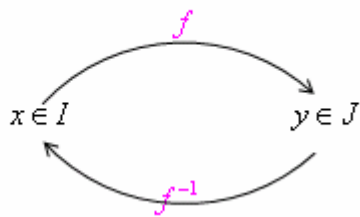
$$f(\pi) = 1 - \pi < 0 \quad \text{و :}$$

$$f(0) \cdot f(\pi) < 0 \quad \text{إذن :}$$

ومنه : المعادلة $f(x) = 0$ تقبل حلا على الأقل في \mathbb{R} .

6- الدالة العكسية لدالة متصلة ورتيبة قطعاً :

لتكن f دالة متصلة ورتيبة قطعاً على $I = [a, b]$ و $J = [m, M]$ $f(I) = J$



إذن : f تقابل من I نحو J .
 ومنه فإن : الدالة f تقبل تقابل عكسي نرمز له بـ : f^{-1} .
 الدالة f^{-1} تسمى **الدالة العكسية** للدالة f .

أمثلة :

$$f(x) = \frac{x^2}{x^2 + 1} \quad -1$$

ليكن g قصور الدالة f على المجال $I = [0, +\infty[$.

بين أن : g تقابل من I نحو مجال J يجب تحديده.

ثم حدد $g^{-1}(x)$ لكل x من J .

الجواب :

-1 لدينا : g قصور f على $I = [0, +\infty[$.

و f دالة جذرية حيز تعريفها \mathbb{R} .

إذن : f متصلة على \mathbb{R} .

ومنه : g متصلة على I .

$$\forall x \in I \quad g(x) = \frac{x^2 + 1 - 1}{x^2 + 1} \quad \text{ولدينا :}$$

الدالة $x \mapsto x^2 + 1$ تزايدية على I (قطعا).

إذن : الدالة $x \mapsto \frac{1}{x^2 + 1}$ تناقصية قطعا على I .

ومنه : $x \mapsto -\frac{1}{x^2 + 1}$ تزايدية قطعا على I .

ومنه : g تزايدية قطعا على \mathbb{R}^+ .

وبالتالي : g تقابل \mathbb{R}^+ نحو J .

• تحديد J :

لدينا : $\lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) = 1$ و $g(0) = 0$.

ومنه : $J = [0, 1[$.

• لنحدد $g^{-1}(x)$ لكل x من $J = [0, 1[$.

لدينا : $\forall y \in [0, +\infty[$ و $\forall x \in [0, 1[$.

$$g^{-1}(x) = y \Leftrightarrow x = g(y)$$

$$\Leftrightarrow x = \frac{y^2}{y^2 + 1}$$

$$\Leftrightarrow x = 1 - \frac{1}{y^2 + 1}$$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{y^2+1} = -x - 1$$

$$\Leftrightarrow y^2+1 = \frac{1}{1-x}$$

$$\Leftrightarrow y^2 = \frac{1}{1-x} - 1 = \frac{x}{1-x}$$

$$\Leftrightarrow y = \pm \sqrt{\frac{x}{1-x}}$$

وبما أن : $y > 0$

$$y = \sqrt{\frac{x}{1-x}} \quad \text{فإن :}$$

$$\forall x \in J ; g^{-1}(x) = \sqrt{\frac{x}{1-x}} \quad \text{ومنه :}$$

-2 $D_f = [0, +\infty[$ $f(x) = \sqrt{x}$
 بين أن f تقبل دالة عكسية f^{-1} وحدد حيز تعريف f^{-1} .
 ثم : $f^{-1}(x)$ لكل x من $D_{f^{-1}}$.

الجواب :

لدينا : f متصلة وتزايدية قطعاً على D_f .

إذن : f تقابل من \mathbb{R}^+ نحو \mathbb{R}^+ .

ومنه حيز تعريف f^{-1} هو \mathbb{R}^+ .

• لنحدد $f^{-1}(x)$

$$\forall x \in \mathbb{R}^+ ; \forall y \in \mathbb{R}^+$$

$$f^{-1}(y) = x \Leftrightarrow y = f(x)$$

$$\Leftrightarrow y = \sqrt{x}$$

$$\Leftrightarrow y^2 = x$$

$$\forall y \in \mathbb{R}^+ \quad f^{-1}(y) = y^2 \quad \text{ومنه :}$$

$$\forall x \in \mathbb{R}^+ \quad f^{-1}(x) = x^2 \quad \text{وبالتالي :}$$

خاصية :

لتكن f دالة متصلة ورتيبة قطعاً على I ، و $f(I) = J$

$$\forall x \in I ; \forall y \in J ; f(x) = y \Leftrightarrow x = f^{-1}(y) \quad (1)$$

$$\forall x \in I ; f^{-1} \circ f(x) = x \quad (2)$$

$$\forall y \in J ; f \circ f^{-1}(y) = y \quad (3)$$

دراسة الدالة f^{-1} :

• منحنى الدالة f (الرتابة)

لتكن f دالة متصلة ورتيبة قطعاً على I . و f^{-1} الدالة العكسية للدالة f .

$$f(I) = J \quad \text{و} :$$

ليكن x و y عنصرين مختلفين من J .

$$\text{بحيث } f^{-1}(y) = b \quad \text{و} \quad f^{-1}(x) = a$$

$$T_{f^{-1}} = \frac{f^{-1}(x) - f^{-1}(y)}{x - y} \quad \text{لدينا :}$$

$$= \frac{a - b}{f(a) - f(b)}$$

$$= \frac{1}{\frac{f(a) - f(b)}{a - b}} = \frac{1}{T_f}$$

$$T_{f^{-1}} \times T_f > 0 \quad \text{إذن :}$$

إذن f و f^{-1} لهما نفس المنحى. (الرتابة)

استنتاج وخاصية :

الدالتين f و f^{-1} لهما نفس المنحى. (الرتابة)

• منحنى الدالة f^{-1} :

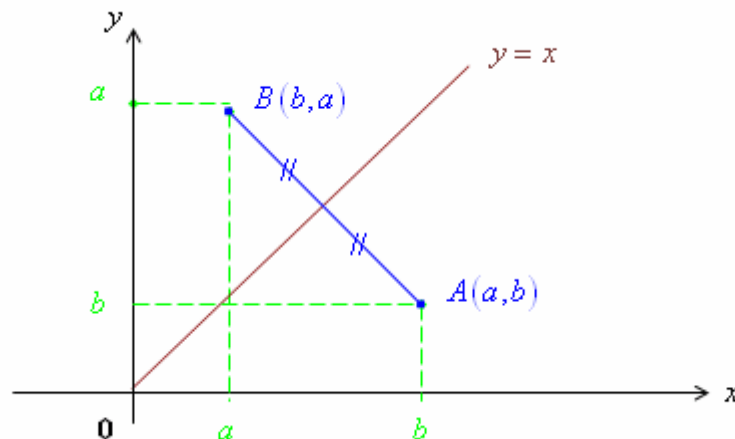
$$\ell_f = \{ M(x, y) \in P / x \in I \text{ و } f(x) = y \}$$

$$\ell_{f^{-1}} = \{ M(y, x) \in P / y \in J \text{ و } f^{-1}(y) = x \}$$

$$= \{ M(y, x) \in P / x \in I \text{ و } f(x) = y \}$$

ملاحظة :

النقطتين $A(a, b)$ و $B(b, a)$ متماثلتين بالنسبة للمنصف الأول $(y = x)$.



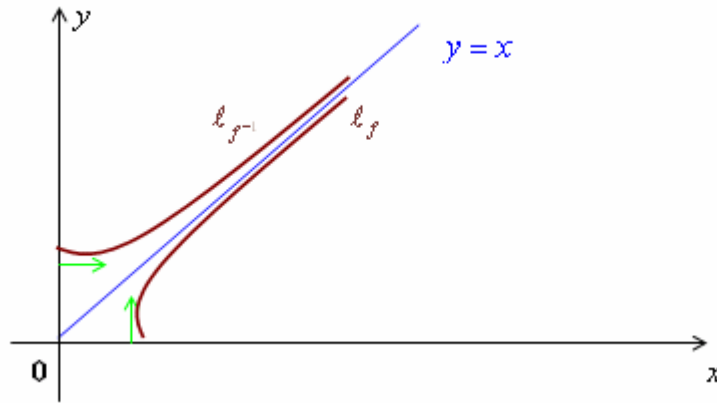
خلاصة وخاصة :

المستوى منسوب إلى معلم متعامد ممنظم (O, \vec{i}, \vec{j}) .

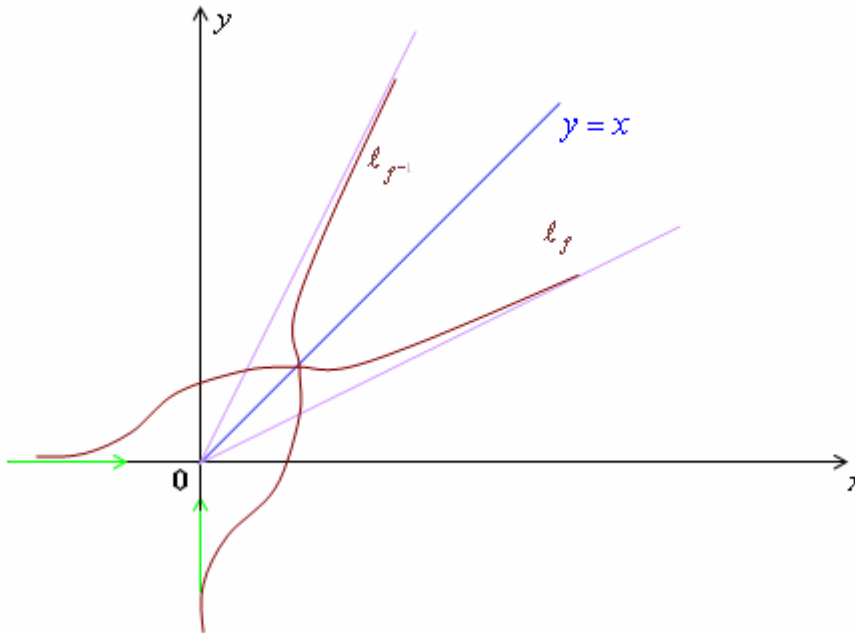
ℓ_f و $\ell_{f^{-1}}$ متماثلين بالنسبة للمنصف الأول.

أمثلة :

• مثال ① :



• مثال ② :



أمثلة لبعض الدوال العكسية :

$$n \in \mathbb{N}^*$$

1. دالة الجذر من الرتبة n

الدالة $f: (x \mapsto x^n)$ متصلة وتزايدية قطعاً على \mathbb{R}^+ و $f(\mathbb{R}^+) = \mathbb{R}^+$ إذن: f تقبل دالة عكسية f^{-1} معرفة على \mathbb{R}^+ .
ونرمز لها بـ: $f^{-1}(x) = \sqrt[n]{x}$

نتائج وخصائص:

$$\forall x \in \mathbb{R}^+ ; \forall n \in \mathbb{N}^* \quad (1)$$

$$\sqrt[n]{x^n} = x = \left(\sqrt[n]{x}\right)^n$$

$$f(x) = x^n$$

$$f^{-1}(x) = \sqrt[n]{x}$$

$$x = f^{-1}(f(x)) = \sqrt[n]{f(x)} = \sqrt[n]{x^n}$$

مثال

$$\sqrt{4} = \sqrt[2]{4} = 2$$

$$\sqrt[3]{8} = \sqrt[3]{2^3} = 2$$

$$\sqrt[4]{16} = \sqrt[4]{2^4} = 2$$

(2) الدالة: $f^{-1}: x \mapsto \sqrt[n]{x}$ متصلة وتزايدية قطعاً على \mathbb{R}^+ .

$$\forall x, y \in \mathbb{R}^+ \quad (3)$$

$$\sqrt[n]{x} = \sqrt[n]{y} \Leftrightarrow x = y$$

$$\sqrt[n]{x} > \sqrt[n]{y} \Leftrightarrow x > y$$

$$\forall x, y \in \mathbb{R}^+ ; \forall n \in \mathbb{N}^* \quad (4)$$

$$\sqrt[n]{xy} = \sqrt[n]{x} \times \sqrt[n]{y}$$

$$\forall x \in \mathbb{R}^+ ; \forall n \in \mathbb{N}^* ; \forall m \in \mathbb{N}^* \quad \sqrt[n]{\sqrt[m]{x}} = \sqrt[n \times m]{x} = \sqrt[m]{\sqrt[n]{x}}$$

$$\sqrt[n]{\frac{x}{y}} = \frac{\sqrt[n]{x}}{\sqrt[n]{y}}$$

$$\forall x \in \mathbb{R}^+ ; \forall n, m \in \mathbb{N}^* \quad (5)$$

$$\sqrt[n]{\sqrt[m]{x}} = \sqrt[n \times m]{x} = \sqrt[m]{\sqrt[n]{x}}$$

$$\sqrt[n]{x^m} = \left(\sqrt[n]{x}\right)^m$$

ملاحظة :

$$\forall a \in \mathbb{R}^+ ; \forall n \in \mathbb{N}^*$$

$$\left(\sqrt[n]{a} \right)^n = a = a^1 = a^{\frac{n}{n}} = \left(a^{\frac{1}{n}} \right)^n$$

$$\sqrt[n]{a} = a^{\frac{1}{n}} \quad \text{إذن :}$$

تعريف :

ليكن a عددا من \mathbb{R}^+ و r عددا جذريا.
العدد a^r يسمى **القوة الجذرية** للعدد a ذات الأس r .

$$r = \frac{p}{q} ; x \in \mathbb{R}^+ \quad \text{لتكن}$$

$$x^r = x^{\frac{p}{q}} = \left(\sqrt[q]{x} \right)^p = \sqrt[q]{x^p}$$

اتصال مركبة دالة متصلة ودالة الجذر من الرتبة n :

- نعتبر الدالة g المعرفة على I بـ : $g(x) = \sqrt[n]{f(x)}$
- إذا كانت f دالة موجبة على I ومتصلة في x_0 و $x_0 \in I$ فإن g متصلة في x_0 .
 - إذا كانت f متصلة وموجبة على I فإن g متصلة على I .

مثال :

$$f(x) = \sqrt[3]{x^2 + 1}$$

الدالة : $x \mapsto x^2 + 1$ متصلة وموجبة على \mathbb{R} .
إذن : الدالة f متصلة على \mathbb{R} .

نهاية مركبة دالة ودالة الجذر من الرتبة n :

لتكن f دالة متصلة وموجبة على I . و $x_0 \in I$

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = l \quad \text{إذا كانت :}$$

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \sqrt[n]{f(x)} = \sqrt[n]{l} \quad \text{فإن :}$$

على الخصوص :

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = +\infty \Rightarrow \lim_{x \rightarrow x_0} \sqrt[n]{f(x)} = +\infty$$

تطبيقات :

أحسب النهايات التالية :

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\sqrt{x^2 - 3}}{\sqrt[3]{x^3 + 1}} \quad (1)$$

طريقة 1 :

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\sqrt{x^2 - 3}}{\sqrt[3]{x^3 + 1}} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x \sqrt{1 - \frac{3}{x^2}}}{x \sqrt[3]{1 + \frac{1}{x^3}}} = 1$$

طريقة 2 :

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\sqrt{x^2 - 3}}{\sqrt[3]{x^3 + 1}} &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{(x^2 - 3)^{\frac{1}{2}}}{(x^3 + 1)^{\frac{1}{3}}} \\ &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{(x^2 - 3)^{\frac{3}{6}}}{(x^3 + 1)^{\frac{2}{6}}} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \sqrt[6]{\frac{(x^2 - 3)^3}{(x^3 + 1)^2}} \\ &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \sqrt[6]{\frac{x^6}{x^6}} = 1 \end{aligned}$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\sqrt[3]{x}}{\sqrt[6]{x}} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^{\frac{1}{3}}}{x^{\frac{1}{6}}} = \lim_{x \rightarrow +\infty} x^{\frac{1}{3} - \frac{1}{6}} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{x^6} \quad (2)$$

تمارين

التمرين الأول :

حدد العددين الحقيقيين a و b بحيث تكون الدالة f

$$\begin{cases} f(x) = \frac{x^2 + x - a}{x - 2} & ; x > 2 \\ f(x) = \frac{2x + b}{3} & ; x \leq 2 \end{cases}$$

المعرفة بما يلي:

متصلة في النقطة $x_0 = 2$.

التمرين الثاني :

حدد الأعداد الحقيقية a و b و c بحيث تكون الدالة f

$$\begin{cases} f(x) = \frac{3x^2 - 2bx + 1}{2x^2 + ax - a - 2} & ; x > 1 \\ f(x) = \frac{-2x^2 + 3x + 3}{x^2 + 1} & ; x < 1 \\ f(1) = \frac{2 + c}{3} \end{cases}$$

متصلة في النقطة $x_0 = 1$.

التمرين الثالث :

لتكن f الدالة العددية المعرفة بما يلي :

$$\begin{cases} f(x) = 2x^2 - 3x & ; x < -1 \\ f(x) = x^2 + 4 & ; -1 \leq x < 1 \\ f(x) = \sqrt{x^2 + 1} + 2 & ; x \geq 1 \end{cases}$$

1. أدرس اتصال الدالة f في -1 و 0 و 1 .

2. هل f متصلة على \mathbb{R} .

التمرين الرابع :

لتكن f الدالة العددية المعرفة بما يلي :

$$f(x) = \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x} - 1}$$

1. حدد \mathcal{D}_f حيز تعريف الدالة f .

2. حدد نهايات f عند محددات \mathcal{D}_f .

3. ليكن g قصور الدالة f على المجال $I =]1, +\infty[$.

أ- بين أن الدالة g تقبل دالة عكسية g^{-1} معرفة من

مجال J ، ينبغي تحديده، نحو المجال I .

ب- حدد الدالة العكسية g^{-1} .

التمرين الخامس :

1. بين أن المعادلة $-x^3 + x + 1 = 0$ تقبل حلا وحيدا α في \mathbb{R} ، ثم تحقق من أن $\alpha \in]1, 2[$.

2. بين أن المعادلة $x^3 - 3x + 1 = 0$ تقبل بالضبط ثلاثة حلول في \mathbb{R} ، ثم أعط تأطيرا لكل منها إلى 5×10^{-1} .

3. بين أن للمعادلة $x^3 - 6x^2 + 6 = 0$ حلان بالضبط في المجال $[-2, 4]$.

4. أحسب النهايات التالية :

$$B = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sqrt[4]{x} - 1}{x - 1} \quad \text{و} \quad A = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sqrt[3]{x} - 1}{x - 1}$$

$$C = \lim_{x \rightarrow +\infty} \sqrt[4]{x^4 + x + 1} - x - 3 \quad \text{و}$$

التمرين السادس :

لتكن f الدالة العددية المعرفة على $[0, +\infty[$ بما يلي:

$$\forall x \in [0, +\infty[: f(x) = \sqrt{x^2 + 1} + 2x$$

1. بين أن f رتيبة قطعاً على المجال $[0, +\infty[$.

2. بين أن الدالة f تقبل دالة عكسية f^{-1} ، معرفة من

مجال J ، ينبغي تحديده، نحو المجال $[0, +\infty[$.

3. حدد $f^{-1}(x)$ لكل x من المجال J .

4. بين أن المعادلة $f(x) = x^3$ تقبل على الأقل حلاً في المجال $[1, 2]$.

التمرين السابع :

1. بسط الأعداد التالية :

$$A = \frac{\sqrt[4]{9} \cdot \sqrt[3]{3} \cdot \sqrt[3]{9}}{\sqrt[5]{81} \cdot \sqrt{\sqrt{3}}} \quad \text{و} \quad B = \frac{\sqrt[3]{4} \cdot \sqrt{8} \cdot (\sqrt[5]{2})^2}{\sqrt{\sqrt[3]{4}}}$$

$$C = \frac{27^{\frac{2}{3}} \cdot 49^{\frac{1}{2}} \cdot 16^{\frac{3}{4}}}{(9\sqrt{3})^{\frac{2}{5}}}$$

2. نعتبر الدالة العددية g المعرفة بما يلي :

$$\begin{cases} g(x) = 1 + \frac{\sqrt[3]{x^2 + 1} - 1}{x} & ; x \neq 0 \\ g(0) = 1 \end{cases}$$

أ- حدد \mathcal{D}_g حيز تعريف الدالة g .

ب- أحسب $\lim_{x \rightarrow +\infty} g(x)$.

ج- أدرس اتصال الدالة g في النقطة 0 .

التمرين الثامن :

لتكن f الدالة العددية المعرفة بما يلي :

$$f(x) = \frac{1 - \sqrt[3]{x}}{1 + \sqrt[3]{x}}$$

1. حدد \mathcal{D}_f وأحسب النهاية $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$.

2. بين أن f تقبل دالة عكسية f^{-1} ، معرفة من مجال

J ، ينبغي تحديده، نحو \mathcal{D}_f .

3. حدد $f^{-1}(x)$ لكل x من المجال J .

4. بين أن المعادلة $f(x) = x$ تقبل حلاً وحيداً في

المجال $[0, 1]$.

الاشتقاق

-I الاشتقاق في نقطة :

أنشطة :

1- حدد العدد المشتق للدالة f في x_0 في الحالات التالية :

-a $x_0 = 1$ $f(x) = \frac{1}{x^2}$

لدينا :

$$\begin{aligned}\lim_{x \rightarrow 1} \frac{f(x) - f(1)}{x - 1} &= \lim_{x \rightarrow 1} \frac{\frac{1}{x^2} - 1}{x - 1} \\ &= \lim_{x \rightarrow 1} \frac{1 - x^2}{x^2 (x - 1)} \\ &= \lim_{x \rightarrow 1} \frac{(1 - x)(1 + x)}{x^2 (x - 1)} \\ &= \lim_{x \rightarrow 1} \frac{-(1 + x)}{x^2} \\ &= -2\end{aligned}$$

إذن العدد المشتق للدالة f في $x_0 = 1$ هو -2 .

ونكتب $f'(1) = -2$

-b $x_0 = 2$ $f(x) = \sqrt{x}$

$$\begin{aligned}\lim_{x \rightarrow 2} \frac{\sqrt{x} - \sqrt{2}}{x - 2} &= \lim_{x \rightarrow 2} \frac{1}{\sqrt{x} + \sqrt{2}} \\ &= \frac{1}{2\sqrt{2}}\end{aligned}$$

إذن : f قابلة للاشتقاق في 2 و $f'(2) = \frac{1}{2\sqrt{2}}$

2- أدرس قابلية اشتقاق f في x_0 في الحالات التالية :

-a $x_0 = 1$ $f(x) = |x^2 - 3x + 2|$

لدينا :

$$f(x) = \begin{cases} x^2 - 3x + 2 & x < 1 \text{ أو } x > 2 \\ -x^2 + 3x - 2 & 1 \leq x \leq 2 \end{cases}$$

لدينا :

$$\begin{aligned}\lim_{\substack{x \rightarrow 1 \\ 1 < x}} \frac{f(x) - f(1)}{x - 1} &= \lim_{\substack{x \rightarrow 1 \\ x > 1}} \frac{-x^2 + 3x - 2}{x - 1} \\ &= \lim_{\substack{x \rightarrow 1 \\ x > 1}} \frac{-(x-1)(x-2)}{x - 1} \\ &= \lim_{\substack{x \rightarrow 1 \\ x > 1}} -(x-2)\end{aligned}$$

$$= 1$$

$$f'_d(1) = 1 \quad \text{ونكتب :}$$

$$\lim_{\substack{x \rightarrow 1 \\ x < 1}} \frac{f(x) - f(1)}{x - 1} = \lim_{\substack{x \rightarrow 1 \\ x < 1}} \frac{x^2 - 3x + 2}{x - 1} \quad \text{ولدينا :}$$

$$= \lim_{\substack{x \rightarrow 1 \\ x < 1}} x - 2 = -1$$

$$f'_g(1) = -1 \quad \text{ومنه :}$$

$$f'_d(1) \neq f'_g(1) \quad \text{بما أن :}$$

فإن : f غير قابلة للاشتقاق في 1 .

$$x_0 = 0$$

$$f(x) = \begin{cases} \tan x & ; \quad 0 < x < \frac{\pi}{2} \\ \sin x & ; \quad -\frac{\pi}{2} < x \leq 0 \end{cases} \quad \text{-b}$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{f(x) - f(0)}{x} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\tan x}{x} = 1 \quad \text{لدينا :}$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{f(x) - f(0)}{x} = \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{\sin x}{x} = 1$$

$$f'_d(0) = f'_g(0) = 1 \quad \text{إذن :}$$

إذن : f قابلة للاشتقاق في $x_0 = 0$

$$\text{و } f'(0) = 1$$

$$x_0 = 0$$

$$f(x) = \begin{cases} \sqrt{x} & ; \quad x \geq 1 \\ x+1 & ; \quad x < 1 \end{cases} \quad \text{-c}$$

$$\lim_{\substack{x \rightarrow 1 \\ x < 1}} f(x) = \lim_{\substack{x \rightarrow 1 \\ x < 1}} x + 1 = 2$$

لدينا :

$$\lim_{\substack{x \rightarrow 1 \\ x > 1}} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^+} \sqrt{x} = 1$$

إذن : f غير متصلة في 1 .

ومنه : f غير قابلة للاشتقاق في 1 .

3- حدد معادلة المماس للمنحنى (ℓ_f) الممثل للدالة f في المستوى المنسوب إلى معلم متعامد ممنظم في النقطة ذات

الأفصول x_0 .

$$x_0 = 0 \quad f(x) = \sqrt{x^3 + 1} \quad \text{-a}$$

$$f(0) = 1 \quad \text{لدينا :}$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x) - f(0)}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{x^3 + 1} - 1}{x} \quad \text{و :}$$

$$= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^3 + 1 - 1}{x(\sqrt{x^3 + 1} + 1)}$$

$$= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2}{(\sqrt{x^3 + 1} + 1)}$$

$$= 0 = f'(0)$$

وبما أن معادلة المماس لـ (ℓ_f) في 0 هي :

$$y = f'(0)(x-0) + f(0)$$

فإن معادلة المماس في 0 هي :

$$y = 1$$

$$x_0 = 1$$

$$f(x) = \sqrt[3]{x} \quad \text{-b}$$

$$f(1) = 1 \quad \text{لدينا :}$$

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{f(x) - f(1)}{x - 1} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sqrt[3]{x} - 1}{x - 1} \quad \text{لدينا :}$$

$$= \lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sqrt[3]{x} - 1}{(\sqrt[3]{x} - 1)(\sqrt[3]{x^2} + \sqrt[3]{x} + 1)}$$

$$= \lim_{x \rightarrow 1} \frac{1}{\sqrt[3]{x^2} + \sqrt[3]{x} + 1} = \frac{1}{3}$$

$$f'(1) = \frac{1}{3} \quad \text{إذن :}$$

ومنه معادلة المماس هي :

$$y = \frac{1}{3}(x-1) + 1$$

$$y = \frac{1}{3}x + \frac{2}{3}$$

خلاصة :

1- الاشتقاق في نقطة :

لتكن f دالة عددية حيز تعريفها D_f يحتوي على مجال مفتوح مركزه x_0 ،
نقول أن f قابلة للاشتقاق في x_0 إذا وفقط إذا كان :

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = l \in \mathbb{R}$$

$$f'(x_0) = l \quad \text{ونكتب :}$$

العدد $f'(x_0)$ يسمى **العدد المشتق** للدالة f في x_0 .

2- الاشتقاق على اليمين :

لتكن f دالة عددية حيز تعريفها يحتوي على مجال مفتوح $[x_0, x_0 + \alpha[$ حيث $\alpha > 0$.

نقول أن f قابلة للاشتقاق في x_0 على اليمين إذا وفقط إذا كان :

$$f'_d(x_0) = l \quad \text{ونكتب :}$$

العدد $f'_d(x_0)$ يسمى **العدد المشتق على اليمين** للدالة f في x_0 .

3- الاشتقاق على اليسار :

لتكن f دالة عددية حيز تعريفها يحتوي على مجال مفتوح $]x_0 - \alpha, x_0]$.

نقول أن f قابلة للاشتقاق في x_0 على اليسار إذا وفقط إذا كان :

$$\lim_{\substack{x \rightarrow x_0 \\ x_0 > x}} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = l \in \mathbb{R}$$

$$f'_g(x_0) = l \quad \text{ونكتب :}$$

العدد $f'_g(x_0)$ يسمى **العدد المشتق على اليسار** للدالة f في x_0 .

خاصية :

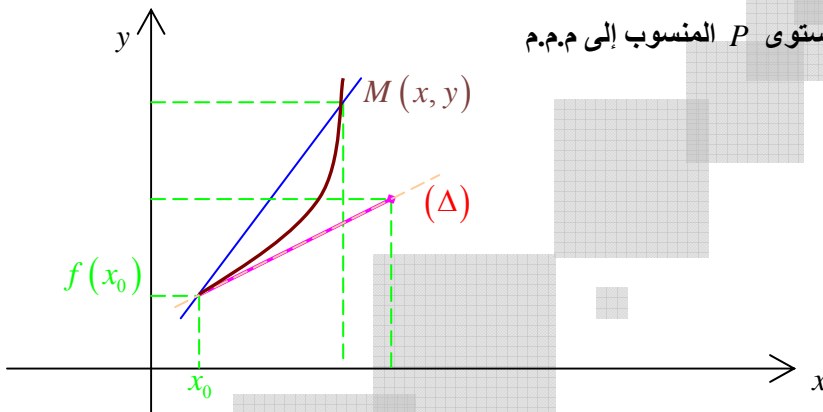
تكون f قابلة للاشتقاق في x_0 إذا وفقط إذا كانت f قابلة للاشتقاق في x_0 على اليمين وقابلة للاشتقاق في x_0 على اليسار و

$$f'_d(x_0) = f'_g(x_0)$$

4- التأويل الهندسي :

ليكن (ℓ_f) المنحنى الممثل للدالة f في المستوى P المنسوب إلى م.م.

و $M_0(x_0, f(x_0))$



لدينا : $\frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$ هو ميل المستقيم (MM_0) .

عندما تقترب M من M_0 .

فإن المستقيم (M_0M) يقترب من (Δ) .

إذن : ميل المستقيم (Δ) هو

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = f'(x_0)$$

إذن : معادلة (Δ) تكون على شكل :

$$y = f'(x_0)x + p$$

وبما أن : $M_0(x_0, f(x_0)) \in (\Delta)$

فإن : $f(x_0) = f'(x_0)x_0 + p$

$$p = f(x_0) - f'(x_0)x_0 \quad \text{إذن :}$$

$$y = f'(x_0)x + f(x_0) - f'(x_0)x_0 \quad \text{ومنه :}$$

أو :

$$y = f'(x_0)(x - x_0) + f(x_0)$$

وهذه هي معادلة المماس لـ (ℓ_f) في $M_0(x_0, f(x_0))$.

نصف مماس لمنحنى دالة :

1- إذا كانت f قابلة للاشتقاق في x_0 على اليمين .

فإن معادلة نصف المماس لـ (ℓ_f) في x_0 على اليمين هي :

$$\begin{cases} y = f'_d(x_0)(x - x_0) + f(x_0) \\ x \geq x_0 \end{cases}$$

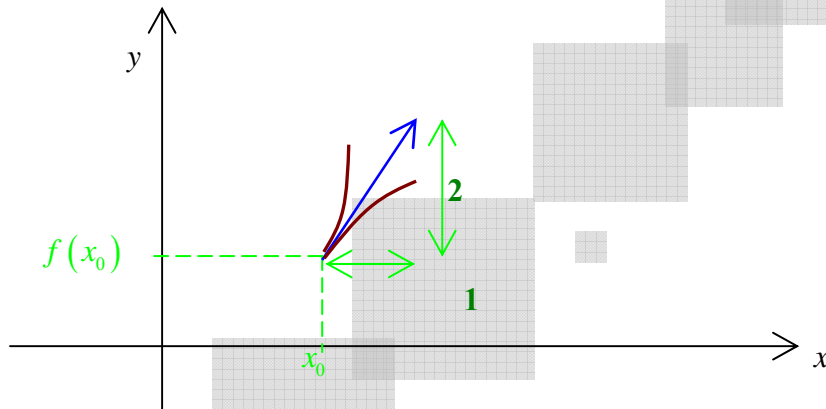
2- إذا كانت f قابلة للاشتقاق في x_0 على اليسار .

فإن معادلة نصف المماس لـ (ℓ_f) في x_0 على اليسار هي :

$$\begin{cases} y = f'_g(x_0)(x - x_0) + f(x_0) \\ x \leq x_0 \end{cases}$$

أمثلة :

$$1- \quad f(x_0) = 1 \quad \text{و} \quad f'_d(x_0) = 2$$



$$2- \quad f'_d(x_0) = -2$$

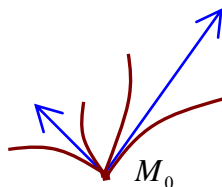
$$f'_g(x_0) = \frac{3}{2}$$

$$f'_g(x_0) = -2$$

$$f'_g(x_0) = -1 ; f'_d(x_0) = 1$$

$$f'_g(x_0) = -1$$

$$f'_d(x_0) = 2$$





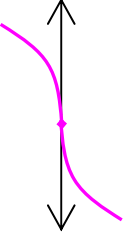
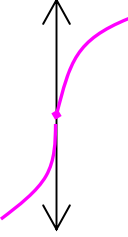


نصف مماس مواز لمحور الأرتييب

إذا كانت : $\lim_{x \rightarrow x_0^+} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = \pm \infty$

أو : $\lim_{x \rightarrow x_0^-} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = \pm \infty$

فإن : (ℓ_f) يقبل نصف مماس مواز لمحور الأرتييب في x_0 .

$\lim_{x \rightarrow x_0^-} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = +\infty$ 	$\lim_{x \rightarrow x_0^+} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = +\infty$ 
$\lim_{x \rightarrow x_0^-} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = -\infty$ 	$\lim_{x \rightarrow x_0^+} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = -\infty$ 
$\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = -\infty$ 	$\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = +\infty$ 

-II الدالة المشتقة :

حدد الدالة المشتقة f' للدالة f في الحالات التالية :

1- $f(x) = (x^2 + 1)\sqrt{x}$

2- $f(x) = \frac{x}{x^2 + 1}$

3- $f(x) = |x^2 - 1|$

4- $f(x) = \tan^5(x)$

تصحيح :

1- لدينا : $f'(x) = [(x^2 + 1)\sqrt{x}]'$

$$\begin{aligned}
 &= (x^2+1)' \sqrt{x} + (x^2+1)(\sqrt{x})' \\
 &= 2x \sqrt{x} + (x^2+1) \frac{1}{2\sqrt{x}} \\
 &= 2x \sqrt{x} + \frac{(x^2+1) \sqrt{x}}{2x} \\
 f(x) &= \frac{x}{x^2+1}
 \end{aligned}$$

-2 لدينا :

$$\begin{aligned}
 f'(x) &= \frac{x'(x^2+1) - x(x^2+1)'}{(x^2+1)^2} \\
 &= \frac{x^2+1 - 2x^2}{(x^2+1)^2} \\
 &= \frac{-x^2+1}{(x^2+1)^2}
 \end{aligned}$$

إذن :

$$f(x) = \begin{cases} x^2-1 & ; \quad x < -1 \text{ و } x > 1 \\ 1-x^2 & ; \quad -1 \leq x \leq 1 \end{cases}$$

-3

$$f'(x) = \begin{cases} 2x & ; \quad x < -1 \text{ و } x > 1 \\ -2x & ; \quad -1 \leq x \leq 1 \end{cases}$$

إذن :

$$f(x) = \tan^5(x)$$

-4

$$\begin{aligned}
 f'(x) &= 5 \tan^4(x) (\tan(x))' \\
 &= 5 \tan^4 x (1 + \tan^2(x)) \\
 &= \frac{5 \tan^4 x}{\cos^2(x)}
 \end{aligned}$$

خلاصة :

$$(u \cdot v)' = u'v + uv'$$

$$\left(\frac{u}{v}\right)' = \frac{u'v - uv'}{v^2}$$

$$(u+v)' = u' + v'$$

$$(ku)' = k \cdot u' \quad / \quad k \in \mathbb{R}$$

$$(u^n)' = nu^{n-1} \cdot u' \quad / \quad n \in \mathbb{N}$$

جدول مشتقات الدوال الاعتيادية :

الدالة f	الدالة f'	ملاحظات
a	0	$a \in \mathbb{R}$
$ax+b$	a	
x	1	
x^n	$n \cdot x^{n-1}$	$n \in \mathbb{N}^*$
$\frac{1}{x}$	$-\frac{1}{x^2}$	$x \neq 0$
\sqrt{x}	$\frac{1}{2\sqrt{x}}$	$x > 0$
$\frac{ax+b}{cx+d}$	$\frac{ad-bc}{(cx+d)^2}$	$x \neq -\frac{d}{c}$
$\cos(x)$	$-\sin x$	
$\sin(x)$	$\cos x$	
$\cos(ax+b)$	$-a \sin(ax+b)$	
$\sin(ax+b)$	$a \cos(ax+b)$	
$\tan(x)$	$1 + \tan^2(x) = \frac{1}{\cos^2(x)}$	$x \neq \frac{\pi}{2} + k\pi$
$f(ax+b)$	$af'(ax+b)$	

الاشتقاق على مجال :

• نقول أن f قابلة للاشتقاق على المجال I ، إذا وفقط إذا كانت قابلة للاشتقاق في كل نقطة من المجال I .

• إذا كان حيز تعريف الدالة يحتوي على مجال من نوع $[x_0, x_0 + \alpha[$

وكان : $D_f =]x_0 - \alpha, x_0 + \alpha[= [x_0, x_0 + \alpha[$

و f قابلة للاشتقاق في x_0 على اليمين فإننا نقول أن : f **قابلة للاشتقاق في x_0** .

ونكتب : $f'(x_0) = f'_d(x_0)$

المشتقات المتتالية :

إذا كانت f قابلة للاشتقاق على المجال I ، فإن دالتها المشتقة f' تكون معرفة على I .

وإذا كانت f' قابلة للاشتقاق على I ، فإن دالتها المشتقة تسمى **المشتقة الثانية** للدالة f' وتكتب f'' أو $f^{(2)}$.

وبصفة عامة : $f^{(n+1)} = (f^{(n)})'$

ملاحظة :

إذا وجدت $f^{(n)}$ وكانت معرفة على I ، نقول أن الدالة f قابلة للاشتقاق n مرة على I .

-III- التقريب المحلي لدالة بدالة تألفية :

$$f(x) = (1+2x)^3 \quad \text{مثال :}$$

$$f'(x) = 3(1+2x)^2 \cdot 2 \quad \text{لدينا :}$$

$$= 6(1+2x)^2$$

$$f'(0) = 6 \quad \text{إن :}$$

$$f(0) = 1 \quad \text{ولدينا :}$$

$$f(x) = 1 + 3(2x) + 3(2x)^2 + (2x)^3 \quad \text{ولدينا :}$$

$$= 1 + 6x + 12x^2 + 8x^3$$

$$= 1 + 6x + x(12x + 8x^2)$$

$$= f(0) + f'(0)(x-0) + (x-0)(12x + 8x^2)$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} 12x + 8x^2 = 0 \quad \text{نلاحظ أن :}$$

إن : عندما تكون x قريبة من 0 .

فإن : قيمة $12x + 8x^2$ تكون مهملة .

إن : بجوار صفر $f(x) \approx 1 + 6x$.

نضع : $u(x) = 1 + 6x$.

الدالة u تسمى **الدالة التآلفية المماسية** للدالة f في $x_0 = 0$.

خاصية وتعريف :

لتكن f دالة عددية معرفة في مجال مفتوح مركزه $x_0 \in (I)$.

تكون f قابلة للاشتقاق إذا وفقط إذا وجدت دالة f معرفة على مجال مفتوح مركزه x_0 بحيث $\forall x \in I$.

$$f(x) = ax + b + \varphi(x)(x-x_0) / (a, b) \in \mathbb{R}^2$$

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \varphi(x) = 0 \quad \text{مع :}$$

الدالة u المعرفة على \mathbb{R} بـ :

$$u(x) = ax + b$$

$$u(x) = f'(x_0)(x-x_0) + f(x_0)$$

تسمى **الدالة التآلفية المماسية** للدالة f في x_0 .

ملاحظة :

المنحنى الممثل للدالة u هو المماس لـ (ℓ_f) في النقطة ذات الأضلاع x_0 .

-IV مشتقة الدالة العكسية :

1- مشتقة دالة مركبة :

تمهيد :

$$f'(x) = \frac{df(x)}{dx} \quad \text{لدينا :}$$

$$fog'(x) = \frac{d(fog(x))}{dx} \quad \text{إن :}$$

$$g(x) = y \quad \text{نضع :}$$

$$f \circ g'(x) = \frac{d f(y)}{dy} \cdot \frac{dy}{dx} \quad \text{إذن :}$$

$$= \frac{d(f(y))}{dy} \cdot \frac{d(g(x))}{dx}$$

$$= f'(y) \cdot g'(x)$$

$$= f'(g(x)) \times g'(x)$$

وبالتالي :

$$(f \circ g)'(x) = f'(g(x)) \times g'(x)$$

$$(g \circ f)'(x) = g'(f(x)) \times f'(x)$$

خاصية :

لتكن f دالة معرفة على مجال I ، $x_0 \in I$ و g دالة معرفة على مجال J بحيث $f(I) \subset J$.

• إذا كانت f قابلة للاشتقاق في x_0 و g قابلة للاشتقاق في $f(x_0) = y_0$.

فإن : $g \circ f$ قابلة للاشتقاق في x_0 .

$$\text{ولدينا : } (g \circ f)'(x) = g'(f(x)) \times f'(x)$$

• إذا كانت f قابلة للاشتقاق على I و g قابلة للاشتقاق على J .

فإن : $g \circ f$ قابلة للاشتقاق على I .

$$\text{ولدينا : } \forall x \in I ; (g \circ f)'(x) = g'(f(x)) \times f'(x)$$

تطبيقات :

أحسب مشتقة الدوال التالية :

$$-1 \quad f(x) = \cos\left(2x + \frac{\pi}{2}\right)$$

$$\text{لدينا : } \forall x \in \mathbb{R} ; f'(x) = \cos'\left(2x + \frac{\pi}{2}\right) \times \left(2x + \frac{\pi}{2}\right)'$$

$$= -2 \sin\left(2x + \frac{\pi}{2}\right)$$

$$-2 \quad f(x) = \cos(ax+b) \Rightarrow f'(x) = -\cos'(ax+b) \cdot (ax+b)'$$

$$= -a \sin(ax+b)$$

$$-3 \quad g(x) = f(ax+b)$$

$$g'(x) = f'(ax+b) \cdot (ax+b)'$$

$$= a \cdot f'(ax+b)$$

$$-4 \quad f(x) = \sqrt{v(x)}$$

$$\text{نضع : } u(x) = \sqrt{x}$$

$$\text{إذن : } f(x) = u \circ v(x)$$

$$u'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}} \quad \text{وبما أن :}$$

$$f'(x) = u'(v(x)) \times v'(x) \quad \text{و :}$$

$$= \frac{1}{2\sqrt{v(x)}} \times v'(x)$$

$$= \frac{v'(x)}{2\sqrt{v(x)}}$$

مشتقة الدالة العكسية :

تمهيد :

لتكن f دالة متصلة ورتيبة قطعاً على J . و $f(I) = J$.

لدينا : f تقابل من I نحو J .

ولتكن : f^{-1} التقابل العكسي للدالة f .

لدينا : $\forall x \in J ; f \circ f^{-1}(x) = x$

إذا كانت f قابلة للاشتقاق على I و f^{-1} قابلة للاشتقاق على J .

فإن : $\forall x \in J ; (f \circ f^{-1})'(x) = 1$

$$f' \left(f^{-1}(x) \right) \times \left(f^{-1} \right)'(x) = 1$$

$$\forall x \in J ; \left(f^{-1} \right)'(x) = \frac{1}{f' \left(f^{-1}(x) \right)} \quad \text{إن :}$$

ملاحظة :

$$x_0 = f^{-1}(y_0) ; f(x_0) = y_0$$

$$\left(f^{-1} \right)'(y_0) = \frac{1}{f'(x_0)}$$

خاصية :

لتكن f دالة متصلة ورتيبة قطعاً على مجال I .

• إذا كانت f قابلة للاشتقاق في x_0 و $f'(x_0) \neq 0$ ، $x_0 \in I$.

فإن : الدالة f^{-1} قابلة للاشتقاق في $y_0 = f(x_0)$.

$$\left(f^{-1} \right)'(y_0) = \frac{1}{f'(x_0)} \quad \text{ولدينا :}$$

• إذا كانت f قابلة للاشتقاق على I بحيث دالتها المشتقة لا تتعدم في I ،

فإن الدالة العكسية f^{-1} قابلة للاشتقاق على : $f'(I) = J$.

ولكل x من I لدينا :

$$\left(f^{-1} \right)'(x) = \frac{1}{f' \left(f^{-1}(x) \right)}$$

تطبيقات :

1 : مشتقة دالة الجذر من الدرجة n .

نعتبر الدالة f المعرفة على \mathbb{R}^+ بـ :

$$f(x) = x^n$$

$$f^{-1}(x) = \sqrt[n]{x}$$

$$f'(x) = n x^{n-1} \quad \text{و :}$$

$$(f^{-1})'(x) = \frac{1}{f'(f^{-1}(x))} \quad \text{ولدينا :}$$

$$= \frac{1}{n (\sqrt[n]{x})^{n-1}}$$

$$(\sqrt[n]{x})' = \frac{1}{n \sqrt[n]{x}^{n-1}} \quad \text{إذن :}$$

ملاحظة :

$$\begin{aligned} (\sqrt[n]{x})' &= \frac{1}{n \left(x^{\frac{1}{n}} \right)^{n-1}} \\ &= \frac{1}{n x^{\frac{n-1}{n}}} = \frac{1}{n} \cdot x^{\frac{1-n}{n}} = \frac{1}{n} x^{\frac{1}{n}-1} \end{aligned}$$

خلاصة :

$$(\sqrt[n]{x})' = \left(x^{\frac{1}{n}} \right)' = \frac{1}{n} x^{\frac{1}{n}-1}$$

مثال :

$$\begin{aligned} f(x) &= \sqrt{x} \quad -1 \\ &= x^{\frac{1}{2}} \end{aligned}$$

$$\forall x \in \mathbb{R}_+^* ; f'(x) = \frac{1}{2} \cdot x^{\frac{-1}{2}}$$

$$= \frac{1}{2 x^{\frac{1}{2}}} = \frac{1}{2 \sqrt{x}}$$

$$f(x) = \sqrt[3]{x} = x^{\frac{1}{3}} \quad -2$$

$$\forall x \in \mathbb{R}_+^* ; f'(x) = \frac{1}{3} x^{\frac{1}{3}-1} = \frac{1}{3} x^{\frac{-2}{3}}$$

$$= \frac{1}{3 x^{\frac{2}{3}}} = \frac{1}{3 \sqrt[3]{x^2}}$$

استنتاج :

$$\forall r \in \mathbb{Q}^* \quad -a$$

$$\forall x \in \mathbb{R}_+^* \quad (x^r)' = r x^{r-1}$$

-b لتكن f دالة قابلة للاشتقاق على I .

ولكل x من I ، $f(x) > 0$ و $r \in \mathbb{Q}$.

$$(f^r)' = r f^{r-1}(x) \times f'(x)$$

أمثلة :

$$\begin{aligned} f(x) &= \sqrt[3]{(x^2+1)^2} \\ &= (x^2+1)^{\frac{2}{3}} \end{aligned} \quad -1$$

$$\begin{aligned} f'(x) &= \frac{2}{3} (x^2+1)^{\frac{2}{3}-1} \cdot (2x) \\ &= \frac{4x}{3 (x^2+1)^{\frac{1}{3}}} \end{aligned}$$

$$f(x) = (\sqrt{x} - \sqrt{2})^2 \quad -2$$

$$\begin{aligned} \forall x \in \mathbb{R}_+^* ; f'(x) &= 2 (\sqrt{x} - \sqrt{2}) \times \frac{1}{2\sqrt{x}} \\ &= \frac{\sqrt{x} - \sqrt{2}}{\sqrt{x}} \end{aligned}$$

$$f(x) = x + 1 + \sqrt{x^2 + x + 1} \quad -3$$

$$f'(x) = 1 + \frac{2x + 1}{2\sqrt{x^2 + x + 1}}$$

$$f(x) = x^2 \sqrt{\frac{x+1}{2x-1}} \quad -4$$

$$f'(x) = 2x \sqrt{\frac{x+1}{2x-1}} + x^2 \frac{-3}{2\sqrt{\frac{x+1}{2x-1}}}$$

$$(\sqrt{u})' = \frac{u'}{2\sqrt{u}}$$

تذكير

$$\left(\frac{ax+b}{cx+d} \right)' = \frac{ad-bc}{(cx+d)^2}$$

دراسة الدوال

I- أنشطة :

1- لتكن f الدالة العددية المعرفة على $[2, +\infty[$

بـ : $f(x) = x - 1 + \sqrt{x^2 - 3x + 2}$

(ℓ_f) هو المنحنى الممثل للدالة f في المستوى المنسوب إلى م.م.م. (O, \vec{i}, \vec{j}) .

1- أحسب $f(2)$ و $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$

2- أ- أحسب : $\lim_{\substack{x \rightarrow 2 \\ x > 2}} \frac{f(x) - f(2)}{x - 2}$ ثم اعط تأويلا هندسيا للنتيجة المحصل عليها.

ب- أحسب $f'(x)$ لكل x من $[2, +\infty[$ ، واعط جدول تغيراتها.

3- بين أن :

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) - \left(2x - \frac{5}{2}\right) = 0$$

وأول النتيجة هندسيا.

الجواب :

1-

$$\begin{aligned} f(2) &= 2 - 1 + \sqrt{2^2 - 3 \times 2 + 2} \\ &= 2 - 1 + \sqrt{4 - 6 + 2} \\ &= 1 \end{aligned}$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} x - 1 + \sqrt{x^2 - 3x + 2}$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} x - 1 = +\infty$$

لدينا :

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \sqrt{x^2 - 3x + 2} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \sqrt{x^2}$$

و :

$$= +\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$$

ومنه :

$$\lim_{\substack{x \rightarrow 2 \\ x > 2}} \frac{f(x) - f(2)}{x - 2} = \lim_{\substack{x \rightarrow 2 \\ x > 2}} \frac{x - 1 + \sqrt{x^2 - 3x + 2} - 1}{x - 2}$$

2- أ-

$$= \lim_{\substack{x \rightarrow 2 \\ x > 2}} \frac{x - 2 + \sqrt{x^2 - 3x + 2}}{x - 2}$$

$$= \lim_{\substack{x \rightarrow 2 \\ x > 2}} 1 + \frac{\sqrt{x^2 - 3x + 2}}{x - 2}$$

$$= \lim_{\substack{x \rightarrow 2 \\ x > 2}} 1 + \sqrt{\frac{x^2 - 3x + 2}{(x - 2)^2}}$$

$$\begin{aligned}
 \lim_{\substack{x \rightarrow 2 \\ x > 2}} \frac{f(x) - f(2)}{x - 2} &= \lim_{\substack{x \rightarrow 2 \\ x > 2}} 1 + \sqrt{\frac{(x-2)(x-1)}{(x-2)^2}} \\
 &= \lim_{\substack{x \rightarrow 2 \\ x > 2}} 1 + \sqrt{\frac{x-1}{x-2}} \\
 &= 1 + (+\infty) \\
 &= +\infty
 \end{aligned}$$

• استنتاج :
في 2 على اليمين ℓ_f يقبل نصف مماس موازي لمحور الأرتايب وموجه نحو الأعلى.

ب- لدينا :

$$f(x) = x - 1 + \sqrt{x^2 - 3x + 2}$$

إذن :

$$\forall x \in]2, +\infty[\quad f'(x) = 1 + \frac{2x - 3}{2\sqrt{x^2 - 3x + 2}}$$

وبما أن :

$$x > 2$$

$$2x - 3 > 0$$

$$\forall x \in]2, +\infty[\quad f'(x) > 0 \quad \text{ومنه :}$$

جدول تغيرات f :

x	2	$+\infty$
$f'(x)$	$+\infty$	+
$f(x)$	1	$\rightarrow +\infty$

3- لنبين أن : $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) - \left(2x - \frac{5}{2}\right) = 0$

لدينا :

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) - \left(2x - \frac{5}{2}\right) = \lim_{x \rightarrow +\infty} x - 1 + \sqrt{x^2 - 3x + 2} - 2x + \frac{5}{2}$$

$$= \lim_{x \rightarrow +\infty} \sqrt{x^2 - 3x + 2} - x + \frac{3}{2}$$

$$= \lim_{x \rightarrow +\infty} \sqrt{x^2 - 3x + 2} - \left(x - \frac{3}{2}\right)$$

$$= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{(x^2 - 3x + 2) - \left(x^2 - 3x + \frac{9}{4}\right)}{\sqrt{x^2 - 3x + 2} + x - \frac{3}{2}}$$

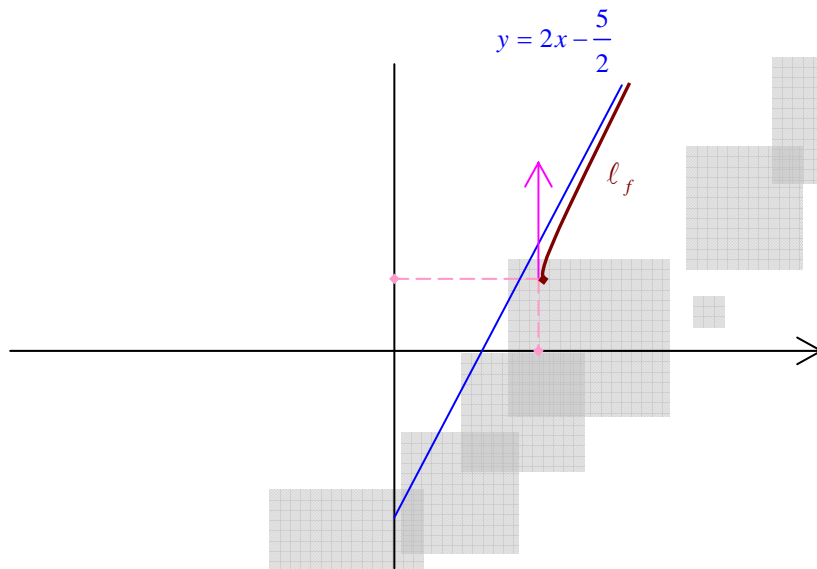
$$= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{-\frac{1}{4}}{\sqrt{x^2 - 3x + 2} + \left(x - \frac{3}{2}\right)}$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) - \left(2x - \frac{5}{2}\right) = \frac{-\frac{1}{4}}{+\infty} = 0$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) - \left(2x - \frac{5}{2}\right) = 0$$

إذن :

وبالتالي : المستقيم ذو المعادلة $y = 2x - \frac{5}{2}$ مقارب مائل لـ ℓ_f بجوار $+\infty$.



تمرين 2 :

لتكن f الدالة المعرفة بـ :

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{4x - x^2}}$$

(1) حدد D_f .

(2) أحسب النهايات عند محددات D_f .

(3) بين أن لكل x من $]0, 4[$:

$$f'(x) = \frac{x - 2}{(4x - x^2) \sqrt{4x - x^2}}$$

اعط جدول تغيرات f .

(4) أنشئ ℓ_f .

(5) بين أن المستقيم ذو المعادلة $x = 2$ محور تماثل لـ ℓ_f .

الجواب :

(1) تحديد مجموعة التعريف :

$$D_f = \{x \in \mathbb{R} \mid 4x - x^2 > 0\}$$

x	$-\infty$	0	4	$+\infty$
x	$-$	0	$+$	$+$
$4 - x$	$+$	$+$	0	$-$
$4x - x^2$	$-$	0	0	$-$

$$D_f =]0, 4[\quad \text{إذن :}$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{1}{\sqrt{4x - x^2}} = +\infty \quad (2)$$

$$\lim_{x \rightarrow 4^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 4^+} \frac{1}{\sqrt{4x - x^2}} = +\infty$$

(3) حساب $f'(x)$ لكل x من $]0, 4[$:

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{4x - x^2}} = (4x - x^2)^{-\frac{1}{2}}$$

$$f'(x) = -\frac{1}{2} (4x - x^2)^{-\frac{3}{2}} (4 - 2x)$$

$$= \frac{x - 2}{(4x - x^2)^{\frac{3}{2}}}$$

$$= \frac{x - 2}{(4x - x^2)^{\frac{2}{2}} \times (4x - x^2)^{\frac{1}{2}}}$$

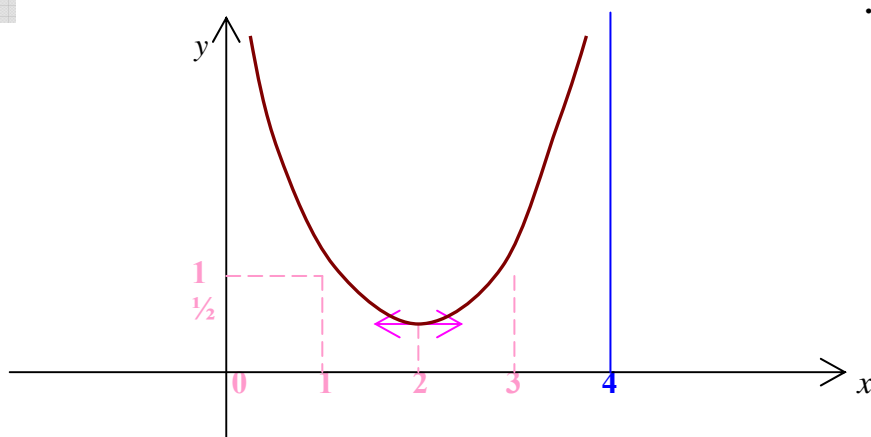
$$f'(x) = \frac{x - 2}{(4x - x^2) \sqrt{4x - x^2}}$$

ومنه :

- جدول التغيرات :

x	0	2	4
$f'(x)$	$ $	$-$	$+$
$f(x)$	$+\infty$	$\frac{1}{2}$	$+\infty$

(4) إنشاء ℓ_f .



$$\forall x \in D_f ; \quad 4-x \in D_f \quad \text{لدينا : (5)}$$

$$\forall x \in D_f ; \quad f(4-x) = \frac{1}{\sqrt{4(4-x) - (4-x)^2}} \quad \text{ولدينا :}$$

$$\begin{aligned} \forall x \in D_f ; \quad f(4-x) &= \frac{1}{\sqrt{16 - 4x - 16 + 8x - x^2}} \\ &= \frac{1}{\sqrt{4x - x^2}} \\ &= f(x) \end{aligned}$$

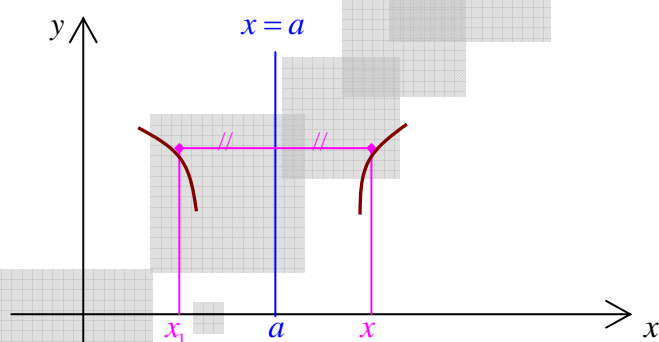
ومنه المستقيم ذو المعادلة $x = 2$ محور تماثل لـ ℓ_f .

تذكير :

1- محور تماثل ℓ_f :

نقول أن المستقيم $D(x=a)$ محور تماثل (ℓ_f) إذا وفقط إذا كان :

$$\begin{aligned} \forall x \in D_f ; \quad 2a-x &\in D_f \\ f(2a-x) &= f(x) \quad \text{و} \end{aligned}$$



$$x_1 + x = 2a \quad \text{لدينا :}$$

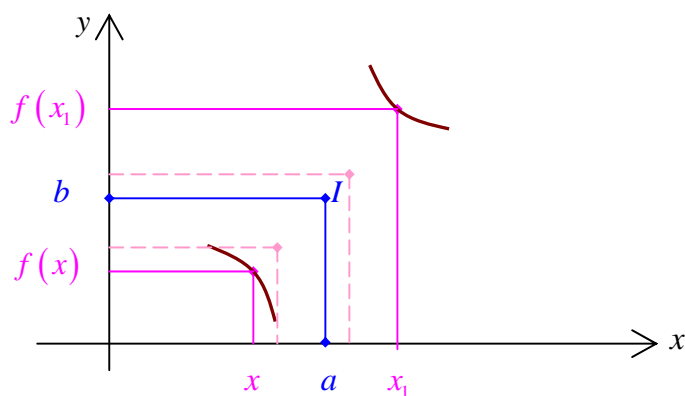
$$x_1 = 2a - x \quad \text{إذن :}$$

$$f(x_1) = f(x)$$

$$f(2a-x) = f(x) \quad \text{ومنه :}$$

2- مركز تماثل ℓ_f :

لتكن $I(a,b)$.



$$x_1 + x = 2a$$

$$f(x_1) + f(x) = 2b$$

$$x_1 = 2a - x$$

$$f(x_1) = 2b - f(x)$$

$$f(2a - x) = 2b - f(x) \quad \text{ومنه :}$$

خاصية :

تكون النقطة $I(a, b)$ مركز تماثل لـ ℓ_f إذا وفقط إذا كان :

$$\forall x \in D_f ; \quad 2a - x \in D_f \quad \bullet$$

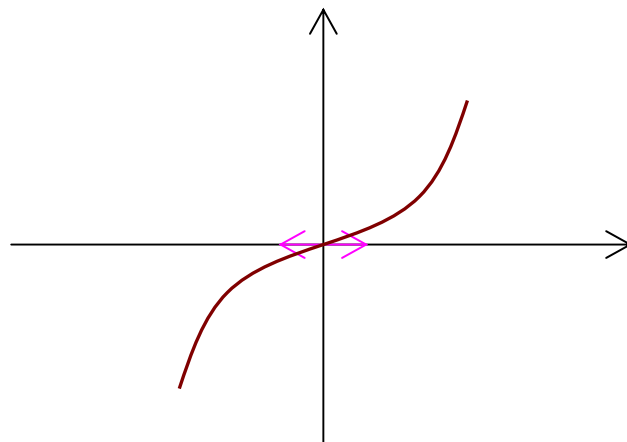
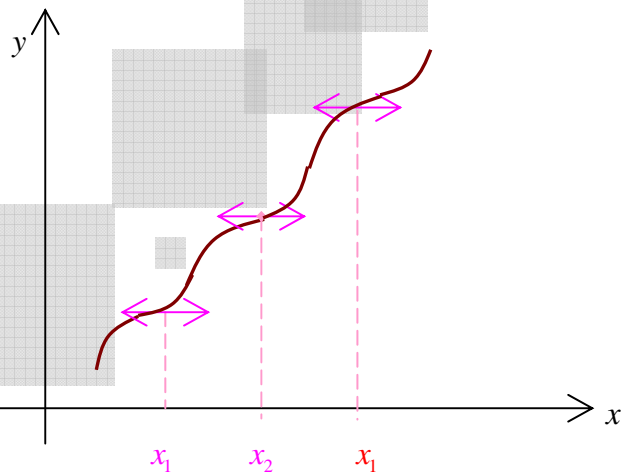
$$\forall x \in D_f ; \quad f(2a - x) = 2b - f(x) \quad \bullet$$

ملخص :

1- قابلية الاشتقاق ورتابة دالة :

لتكن f دالة قابلة للاشتقاق على I .

- إذا كان لكل x من I : $f'(x) = 0$ فإن : f ثابتة على I .
- إذا كان لكل x من I ، $f'(x) > 0$ (يمكن لـ f' أن تنعدم في عدد منته من النقاط).
فإن : f تزايدية قطعاً على I .
- إذا كان لكل x من I ، $f'(x) < 0$ (يمكن لـ f' أن تنعدم في عدد منته من النقاط).
فإن : f تناقصية قطعاً على I .



a- القيم القصوى

لتكن $x_0 \in I$ و $I \subset D_f$
 نقول أن $f(x_0)$ **قيمة قصوى** للدالة f على I إذا وفقط إذا كان :

$$\forall x \in I ; f(x) \leq f(x_0)$$

• إذا كانت f قابلة للاشتقاق على $I = [a, b]$ و $x_0 \in I$

العدد $f(x_0)$ هو قيمة قصوى للدالة f على I إذا وفقط إذا كان :

$$\forall x \in [a, x_0[; f'(x_0) \succ 0$$

$$\forall x \in]x_0, b] ; f'(x_0) \prec 0$$

$$f'(x_0) = 0$$

و
و

x	a	x_0	b
$f'(x)$		+	-
$f(x)$		$f(x_0)$	

b- القيم الدنيا

$x_0 \in I$ ، $I \subset D_f$
 نقول أن $f(x_0)$ **قيمة دنيا** للدالة f على I إذا وفقط إذا كان :

$$\forall x \in I ; f(x) \geq f(x_0)$$

خاصية :

إذا كانت f قابلة للاشتقاق على مجال I مركزه x_0 ،
 يكون $f(x)$ **مطرافاً** إذا وفقط إذا كانت الدالة المشتقة f' تنعدم في x_0 وتغير إشارتها.

3- **تقعر منحنى دالة ونقط الانعطاف :**

تعريف :

لتكن f قابلة للاشتقاق على مجال I و (ℓ_f) المنحنى الممثل لها.
 نقول أن المنحنى (ℓ_f) **محدب** (أو تقعر المنحنى موجه نحو الأرتيب الموجبة) إذا وفقط إذا كان ℓ_f **فوق** جميع مماساته.
 ونقول أن المنحنى (ℓ_f) **مقعر** إذا وفقط إذا كان ℓ_f **تحت** جميع مماساته.



خاصية :

لتكن f دالة قابلة للاشتقاق مرتين على I .

- و (ℓ_f) المنحنى الممثل لها.
- إذا كانت " f موجبة على I فإن ℓ_f محدب.
 - إذا كانت " f سالبة على I فإن ℓ_f مقعر.
 - إذا انعدمت " f في x_0 ($x_0 \in I$) وتغير إشارتها فإن النقطة $(x_0, f(x_0))$ نقطة انعطاف.

4- الفروع اللانهائية Branches infinies

ليكن ℓ_f المنحنى الممثل للدالة f .

نقول أن (ℓ_f) يقبل فرعاً لانهائياً إذا وفقط إذا آلت x أو $f(x)$ إلى ∞ .

$$\ell_f = \{M(x, f(x)) \mid x \in D_f\}$$

a- المستقيمات المقاربة لمنحنى :

$$1- \text{ إذا كانت } \left| \lim_{x \rightarrow x_0^+} f(x) \right| = +\infty \text{ أو } \left| \lim_{x \rightarrow x_0^-} f(x) \right| = +\infty$$

فإن المستقيم $(x = x_0)$ مقارب عمودي لـ (ℓ_f) .

$$2- \text{ إذا كانت } \lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = b$$

فإن المستقيم $(y = b)$ مقارب أفقي لـ (ℓ_f) بجوار ∞ .

$$3- \text{ إذا كانت } \lim_{x \rightarrow \infty} f(x) - (ax + b) = 0 \quad (a \neq 0)$$

فإن المستقيم ذو المعادلة $y = ax + b$ مقارب لـ (ℓ_f) بجوار ∞ .

$$4- \text{ إذا كانت } f(x) = ax + b + h(x) \text{ حيث } \lim_{x \rightarrow \infty} h(x) = 0$$

فإن المستقيم ذو المعادلة $y = ax + b$ مقارب لـ (ℓ_f) بجوار ∞ .

5- يكون المستقيم ذو المعادلة $y = ax + b$ مقارباً لـ (ℓ_f) بجوار ∞ إذا وفقط إذا كان :

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f(x)}{x} = a \quad \text{و} \quad \lim_{x \rightarrow \infty} f(x) - ax = b$$

$$(a, b) \in \mathbb{R}^2 \quad \text{أو} \quad (a \in \mathbb{R}^*, b \in \mathbb{R})$$

b- الاتجاهات المقاربة :

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \infty$$

$$1- \text{ إذا كانت } \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x} = \infty$$

فإن : (ℓ_f) يقبل فرعاً شلجيميا اتجاهه محور الأرتيب بجوار $+\infty$.

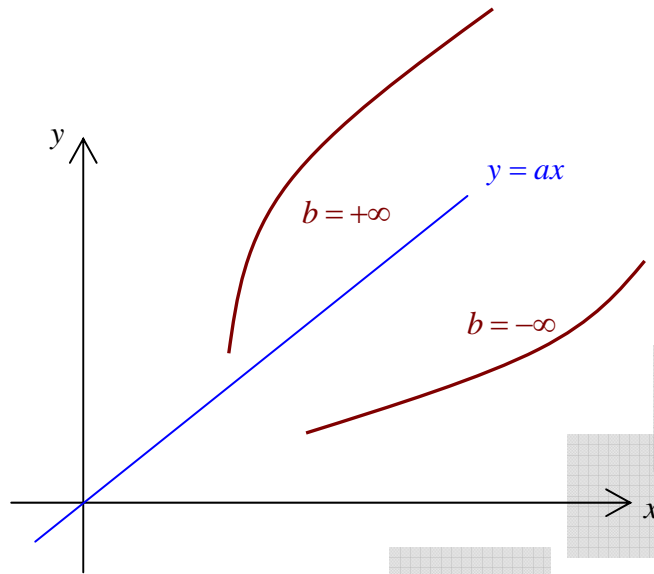
$$2- \text{ إذا كانت } \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x} = 0$$

فإن : (ℓ_f) يقبل فرعاً شلجيميا اتجاهه محور الأفاصيل بجوار ∞ .

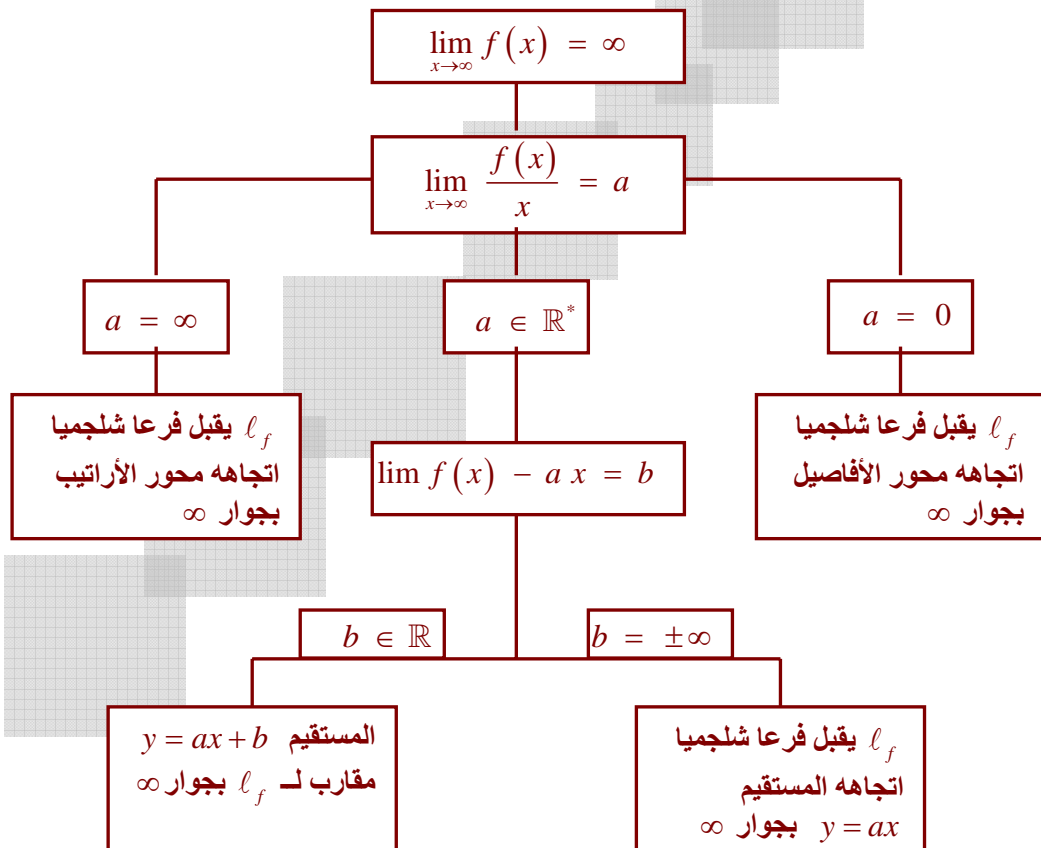
$$3- \text{ إذا كانت } \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f(x)}{x} = a \in \mathbb{R}^*$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) - ax = \infty \quad \text{و :}$$

فإن : (ℓ_f) يقبل فرعاً شلجيمياً اتجاهه المستقيم ذو المعادلة $y = ax$ بجوار ∞ .



خلاصة :



تمارين

تمرين 1:

نعتبر الدالة العددية f المعرفة بمايلي : $f(x) = x\sqrt{x^2+1} - x^2$
 1-أ حدد D حيز تعريف الدالة f .

ب- أحسب $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$ و $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x)$ و $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{f(x)}{x}$ تم أعط تأويلا هندسيا للنتائج.

2.أ- برهن أن: $\forall x \in \mathbb{R} : f'(x) = \frac{(\sqrt{x^2+1} - x)^2}{\sqrt{x^2+1}}$

ب- أعط جدول تغيرات الدالة f .

3-أ بين أن: $\forall x \in \mathbb{R} : f(x) \leq x$ تم أول هندسيا النتيجة.

ب- أنشئ (C_f) في م م م (o, \vec{i}, \vec{j}) .

4-أ بين أن f تقبل دالة عكسية معرفة على مجال J يتم تحديده.

ب- بين أن: $\forall x \in J : f^{-1}(x) = \frac{x}{\sqrt{1-2x}}$

ج- أنشئ $(C_{f^{-1}})$ في نفس المعلم.

تمرين 2:

$$\begin{cases} f(x) = \sqrt{x^2+1} - x; x \leq 0 \\ f(x) = \sqrt[3]{x^3+x} + 1; x > 0 \end{cases}$$

نعتبر الدالة f المعرفة كمايلي :

1) حدد D_f

2) أدرس اتصال f في 0

3) أدرس قابلية اشتقاق f على اليمين و على اليسار في 0 و أول النتائج هندسيا.

4) أحسب نهايات f عند محداث D_f

5) أدرس الفروع اللانهائية ل (C_f)

6) أحسب $f'(x)$ لكل x من \mathbb{R}^* تم ضع جدول تغيرات f على D_f

7) أ برهن أن : $\forall x > 0 : f''(x) = \frac{6x^2 - 2}{9(x^3 + x)^{5/3}}$ تم استنتج نقطة إنعطاف (C_f)

8) أرسم (C_f) في م م م (o, \vec{i}, \vec{j}) .

9) ليكن g قصور f على $I =]-\infty, 0]$

أ) بين أن g تقابل من I نحو مجال J يتم تحديده

ب) أحسب $g^{-1}(x)$ لكل $x \in J$

ج) أنشئ $(C_{g^{-1}})$ في نفس المعلم

د) أحسب $(g^{-1})'(2)$.

تمرين 3 : نعتبر الدالة f بحيث $f(x) = 1 - x + \frac{x}{\sqrt{1+x^2}}$

1) حدد D_f و أحسب نهايات f عند محداث D_f

2) أحسب $f'(x)$ من أجل x عدد حقيقي

3) برهن أنه : $\forall x \in \mathbb{R} : 1 - (1+x^2)\sqrt{1+x^2} \leq 0$

4) ضع جدول تغيرات الدالة f

(5) برهن أن المعادلة $f(x) = 0$ تقبل حلا وحيدا α بحيث $2 < \alpha < \frac{7}{4}$

(6) ادرس الفروع اللانهائية ل (C_f)

(7) أدرس الوضع النسبي ل (C_f) و $\Delta: y = -x + 2$

(8) بين أن $I(0,1)$ مركز تماثل ل (C_f)

(9) حدد تقاطع (C_f) مع (Oy)

(10) حدد إحداثيات ممائلة النقطة ذات الأفصول α بالنسبة ل I و ارسم (C_f) في م م م (o, \vec{i}, \vec{j})

(11) حدد حسب قيم البار متر m عدد حلول المعادلة $(x+m)\sqrt{1+x^2} = x + \sqrt{1+x^2}$.

تمرين 4:

لتكن الدالة f بحيث: $f(x) = \sqrt{3}\sin(x) + \cos(x) - 1$

(1) برهن أنه تكفي دراسة الدالة f على $D_E = [-\pi, \pi]$

(2) لتكن $g(x) = \sqrt{3}\cos(x) - \sin(x)$. أدرس إشارة g على D_E

(3) أحسب $f(-\frac{\pi}{6})$ و $f(\frac{5\pi}{6})$

(4) حدد مماسات (C_f) عند $A(-\frac{\pi}{6}, -1)$ و $B(\frac{5\pi}{6}, -1)$

(5) أدرس في D_E نقط انعطاف و تقعر (C_f)

(6) حل المعادلة $f(x) = 0$

(7) أرسم (C_f) على D_E في م م م.

تمرين 5:

نعتبر الدالة العددية f المعرفة بمايلي: $f(x) = \sqrt[3]{2x^2 - x^3}$ و (C_f) منحناها في م م م (o, \vec{i}, \vec{j}) .

1- حدد D_f ثم أحسب $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x)$

2- حدد المقارب المائل ل (C_f) بجوار $-\infty$

3- أ- أدرس قابلية اشتقاق الدالة f على يسار 2 و عند 0 ، ثم أول النتائج هندسيا.

ب- بين أن f قابلة للاشتقاق على $D_f - \{0, 2\}$ و أن: $f'(x) = \frac{x(4-3x)}{3(f(x))^2} \forall x \in D_f - \{0, 2\}$

ج) أنشئ جدول تغيرات f و استنتج مطارفها.

4- أنشئ (C_f) في م م م (o, \vec{i}, \vec{j}) .

5- ليكن g قصور الدالة f على المجال $I = [0, \frac{4}{3}]$

أ- بين أن g تقابل من I نحو مجال J يتم تحديده.

ب- بين أن g^{-1} قابلة للاشتقاق عند 1 و حدد $(g^{-1})'(1)$ تم أكتب معادلة المماس (Δ') ل $(C_{g^{-1}})$ عند النقطة

$A(1,1)$

المتتاليات العددية

I- المتتاليات: تعريف وخصائص

1- تعريف

ليكن I جزء من \mathbb{N}
المتتالية العددية هي تطبيق من I نحو \mathbb{R}

اصطلاحات

*- $u: I \rightarrow \mathbb{R}$ متتالية عددية

يرمز لصورة n بواسطة u_n عوض $u(n)$. العدد u_n يسمى حد المتتالية ذا المدل n ويسمى أيضا الحد العام.

يرمز للمتتالية بـ $(u_n)_{n \in I}$ عوض u .

$\{u_n / n \in I\}$ هي مجموعة قيم المتتالية $(u_n)_{n \in I}$.

*- إذا كان $I = \mathbb{N}$ فإنه يرمز للمتتالية بـ $(u_n)_{n \geq 0}$ أو (u_n)

❖ إذا كان $I = \mathbb{N}^*$ فإنه يرمز للمتتالية بـ $(u_n)_{n \geq 1}$

❖ إذا كان $I = \{n \in \mathbb{N} / n \geq n_0\}$ فإنه يرمز للمتتالية أيضا بـ $(u_n)_{n \geq n_0}$

2- المتتالية المكبورة – المتتالية المصغورة

تعريف

تكون المتتالية $(u_n)_{n \in I}$ مكبورة إذا وفقط إذا وجد عدد حقيقي M بحيث $\forall n \in I \quad u_n \leq M$

تكون المتتالية $(u_n)_{n \in I}$ مصغورة إذا وفقط إذا وجد عدد حقيقي m بحيث $\forall n \in I \quad u_n \geq m$

تكون المتتالية $(u_n)_{n \in I}$ محدودة إذا وفقط إذا كانت $(u_n)_{n \in I}$ مكبورة و مصغورة

ملاحظة $(u_n)_{n \in I}$ محدودة $\Leftrightarrow \exists k \in \mathbb{R}_+^* \quad \forall n \in I \quad |u_n| \leq k$

رتابة متتالية

لتكن $(u_n)_{n \in I}$ متتالية حيث $I = \{n \in \mathbb{N} / n \geq n_0\}$

$(u_n)_{n \in I}$ متتالية تزايدية $\Leftrightarrow \forall n \in I \quad u_{n+1} \geq u_n$

$(u_n)_{n \in I}$ متتالية تزايدية قطعاً $\Leftrightarrow \forall n \in I \quad u_{n+1} > u_n$

$(u_n)_{n \in I}$ متتالية تناقصية $\Leftrightarrow \forall n \in I \quad u_{n+1} \leq u_n$

$(u_n)_{n \in I}$ متتالية تناقصية قطعاً $\Leftrightarrow \forall n \in I \quad u_{n+1} < u_n$

$(u_n)_{n \in I}$ متتالية ثابتة $\Leftrightarrow \forall n \in I \quad u_{n+1} = u_n$

3- المتتالية الحسابية

تعريف

تكون متتالية $(u_n)_{n \geq n_0}$ حسابية إذا كان يوجد عدد حقيقي r بحيث $\forall n \geq n_0 \quad u_{n+1} = u_n + r$

العدد r يسمى أساس المتتالية.

الخاصية المميزة

تكون متتالية $(u_n)_{n \geq n_0}$ حسابية إذا وفقط إذا كان $\forall n > n_0 \quad u_n = \frac{u_{n-1} + u_{n+1}}{2}$

صيغة الحد العام

إذا كان $(u_n)_{n \geq n_0}$ متتالية حسابية أساسها r فإن $\forall n \geq n_0 \quad u_n = u_{n_0} + (n - n_0)r$

ملاحظة

- إذا كان (u_n) متتالية حسابية أساسها r فإن $\forall n \in \mathbb{N} \quad u_n = u_0 + nr$

- إذا كان $(u_n)_{n \geq 1}$ متتالية حسابية أساسها r فإن $\forall n \geq 1 \quad u_n = u_1 + (n-1)r$

- إذا كان $(u_n)_{n \geq n_0}$ متتالية حسابية أساسها r فإن $\forall n \geq p \geq n_0 \quad u_n = u_p + (n-p)r$

مجموع حدود متتابعة لمتتالية حسابية

لتكن $(u_n)_{n \geq n_0}$ متتالية حسابية

إذا كان $S_n = u_p + u_{p+1} + \dots + u_{n-1}$ فإن $S_n = \frac{(n-p)(u_p + u_{n-1})}{2}$
 $n-p$ هو عدد حدود المجموع S_n و u_p هو الحد الأول للمجموع S_n و u_{n-1} هو الحد الأخير للمجموع S_n

ملاحظة

- إذا كان (u_n) متتالية حسابية فإن S_n مجموع n حدا أولا منها هو

$$S_n = u_0 + u_1 + \dots + u_{n-1} = \frac{n(u_0 + u_{n-1})}{2}$$

- إذا كان $(u_n)_{n \geq 1}$ متتالية حسابية فإن S_n مجموع n حدا أولا منها هو

$$S_n = u_1 + u_2 + \dots + u_n = \frac{n(u_1 + u_n)}{2}$$

4- المتتالية الهندسيةتعريف

تكون متتالية $(u_n)_{n \geq n_0}$ هندسية إذا كان يوجد عدد حقيقي q بحيث $\forall n \geq n_0 \quad u_{n+1} = qu_n$
 العدد q يسمى أساس المتتالية .

الخاصية المميزة

تكون متتالية $(u_n)_{n \geq n_0}$ هندسية إذا وفقط إذا كان $\forall n \geq n_0 \quad u_n^2 = u_{n+1} \cdot u_{n-1}$

صيغة الحد العامخاصية

إذا كان $(u_n)_{n \geq n_0}$ متتالية هندسية أساسها q فإن $\forall n \geq n_0 \quad u_n = u_{n_0} q^{n-n_0}$

ملاحظة

- إذا كان (u_n) متتالية هندسية أساسها q فإن $\forall n \in \mathbb{N} \quad u_n = u_0 q^n$

- إذا كان $(u_n)_{n \geq 1}$ متتالية هندسية أساسها q فإن $\forall n \geq 1 \quad u_n = u_1 q^{n-1}$

- إذا كان $(u_n)_{n \geq n_0}$ متتالية هندسية أساسها q فإن $\forall n \geq p \geq n_0 \quad u_n = u_p q^{n-p}$

مجموع حدود متتابعة لمتتالية هندسية

لتكن $(u_n)_{n \geq n_0}$ متتالية هندسية أساسها q يخالف 1

$$S_n = u_p + u_{p+1} + \dots + u_{n-1} \quad \text{فإن} \quad S_n = u_p \left(\frac{1-q^{n-p}}{1-q} \right)$$

$n-p$ هو عدد حدود المجموع S_n و u_p هو الحد الأول للمجموع S_n

ملاحظة

- إذا كان (u_n) متتالية هندسية أساسها q يخالف 1 فان S_n مجموع n حدا أولا منها هو

$$S_n = u_0 + u_1 + \dots + u_{n-1} = u_0 \left(\frac{1-q^n}{1-q} \right)$$

- إذا كان $(u_n)_{n \geq 1}$ متتالية هندسية أساسها q يخالف 1 فان S_n مجموع n حدا أولا منها هو

$$S_n = u_1 + u_2 + \dots + u_n = u_1 \left(\frac{1-q^n}{1-q} \right)$$

حالة خاصة

إذا كانت $(u_n)_{n \geq n_0}$ متتالية هندسية أساسها 1 فان $S_n = u_p + u_{p+1} + \dots + u_{n-1} = u_p (n - p)$

VII - نهايات المتتاليات :

1- تمهيد :

نعتبر المتتالية $(u_n)_{n \in I}$ المعرفة بـ $u_n = f(n) \quad \forall n \in I$

حيث f دالة عددية.

- إذا كانت I منتهية فلا معنى لحساب النهاية.
- إذا كانت I غير منتهية فهنا يمكن حساب نهاية (u_n) عندما تؤول إلى $+\infty$.

ولدينا : $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = \lim_{n \rightarrow +\infty} f(n)$

تذكير :

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty \Leftrightarrow (\forall A > 0) (\exists B > 0) (\forall x \in D_f)$$

$$B < x \Rightarrow A < f(x)$$

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} f(n) = +\infty \Leftrightarrow (\forall A > 0) (\exists N \in \mathbb{N})$$

$$N < n \Rightarrow A < f(n)$$

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = +\infty \Leftrightarrow (\forall A > 0) (\exists N \in \mathbb{N})$$

$$N < n \Rightarrow A < u_n$$

أمثلة :

أحسب نهاية المتتالية إذا كانت المتتالية :

$$u_n = \sqrt[3]{n+1} \quad (1)$$

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = \lim_{n \rightarrow +\infty} \sqrt[3]{n+1} = +\infty$$

$$u_n = n \operatorname{Arc} \tan n \quad (2)$$

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow +\infty} u_n &= \lim_{n \rightarrow +\infty} n \operatorname{Arc} \tan n = +\infty \cdot \frac{\pi}{2} \\ &= +\infty \end{aligned}$$

ملاحظة:

$$\begin{aligned} \lim u_n = -\infty &\Leftrightarrow (\forall A > 0) (\exists N \in \mathbb{N}) \\ N < n &\Rightarrow u_n < -A \end{aligned}$$

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = -\infty \Leftrightarrow \lim_{n \rightarrow +\infty} (-u_n) = +\infty$$

تذكير:

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = l &\Leftrightarrow (\forall \varepsilon > 0) (\exists B > 0) (\forall x \in D_f) \\ B < x &\Rightarrow |f(x) - l| < \varepsilon \end{aligned}$$

2- نهاية (q^n) :

ناقش حسب قيم العدد الحقيقي q نهاية q^n .

الحالة ①: $1 < q$

نضع: $(\alpha > 0) / q = 1 + \alpha$

لدينا: $q^n = (1 + \alpha)^n$

بين بالترجع أن: $\forall n \in \mathbb{N} ; (1 + \alpha)^n \geq 1 + n \alpha$

من أجل: $n = 0$

لدينا: $(1 + \alpha)^0 = 1 ; 1 + 0 \alpha = 1$

إن: $(1 + \alpha)^0 \geq 1 + 0 \alpha$

من أجل: $n = 1$

لدينا: $(1 + \alpha)^1 = 1 + \alpha$

إن: $(1 + \alpha)^1 \geq 1 + \alpha$

من أجل: $n = 2$

$$(1 + \alpha)^2 = 1 + 2\alpha + \alpha^2 \quad \text{لدينا :}$$

$$(1 + \alpha)^2 \geq 1 + 2\alpha \quad \text{إذن :}$$

$$(1 + \alpha)^n \geq 1 + n\alpha \quad \text{نفترض أن :}$$

$$(1 + \alpha)^{n+1} \geq 1 + (n+1)\alpha \quad \text{ونبين أن :}$$

$$(1 + \alpha)^n \geq 1 + n\alpha \quad \text{لدينا :}$$

$$(1 + \alpha)^{n+1} \geq (1 + \alpha)(1 + n\alpha) \quad \text{إذن :}$$

$$(1 + \alpha)^{n+1} \geq 1 + n\alpha + \alpha + n\alpha^2 \quad \text{إذن :}$$

$$(1 + \alpha)^{n+1} \geq 1 + (n+1)\alpha + n\alpha^2 \quad \text{إذن :}$$

$$(1 + \alpha)^{n+1} \geq 1 + (n+1)\alpha \quad \text{ومنه :}$$

$$\forall n \in \mathbb{N} ; (1 + \alpha)^n \geq 1 + n\alpha \quad \text{وبالتالي :}$$

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} 1 + n\alpha = +\infty \quad \text{ولدينا :}$$

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} (1 + \alpha)^n = +\infty \quad \text{إذن :}$$

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} q^n = +\infty \quad \text{ومنه :}$$

الحالة ② : $q = 1$

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} q^n = \lim_{n \rightarrow +\infty} 1^n = 1$$

الحالة ③ : $0 < q < 1$

$$1 < \frac{1}{q} \quad \text{لدينا :}$$

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \left(\frac{1}{q}\right)^n = +\infty \quad \text{إذن :}$$

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{q^n} = +\infty \quad \text{إذن :}$$

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} q^n = 0 \quad \text{ومنه :}$$

الحالة ④ : $q = 0$

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} q^n = 0$$

الحالة ⑤ : $-1 < q < 0$

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} (-q)^n = 0 \quad \text{لدينا :}$$

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} (-1)^n q^n = 0 \quad \text{إذن :}$$

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} q^n = 0 \quad \text{إذن :}$$

الحالة ⑥ : $q \leq -1$
نهاية q^n غير موجودة.

خلاصة :

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} q^n = \begin{cases} +\infty & 1 < q \\ 1 & 1 = q \\ 0 & -1 < q < 1 \\ \text{غير موجودة} & q \leq -1 \end{cases}$$

تطبيقات :

أحسب نهاية (u_n) في الحالات التالية :

$$u_n = \left(\frac{1 - \sqrt{2}}{1 + \sqrt{2}} \right)^n \quad (1)$$

$$1 - \sqrt{2} < 1 + \sqrt{2} \quad \text{لدينا :}$$

$$\frac{1 - \sqrt{2}}{1 + \sqrt{2}} < 1 \quad \text{إذن :}$$

$$\frac{1 - \sqrt{2}}{1 + \sqrt{2}} + 1 = \frac{1 - \sqrt{2} + 1 + \sqrt{2}}{1 + \sqrt{2}} \quad \text{لدينا :}$$

$$= \frac{2}{1 + \sqrt{2}} > 0$$

$$\frac{1 - \sqrt{2}}{1 + \sqrt{2}} > -1 \quad \text{إذن :}$$

$$-1 < \frac{1 - \sqrt{2}}{1 + \sqrt{2}} < +1 \quad \text{ومنه :}$$

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = 0 \quad \text{وبالتالي :}$$

$$u_n = \frac{2^n + 3^n}{2^n - 3^n} \quad (2)$$

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{2^n + 3^n}{2^n - 3^n}$$

$$= \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{\left(\frac{2}{3}\right)^n + 1}{\left(\frac{2}{3}\right)^n - 1}$$

$$= \frac{1}{-1} = -1$$

مصاديق تقارب متتالية

نعتبر المتتاليات : $(u_n)_{n \geq n_0}$ ، $(v_n)_{n \geq n_0}$ و $(w_n)_{n \geq n_0}$.

(1) إذا وجد عدد صحيح طبيعي N حيث : $\forall n \succ N$

$$u_n \prec v_n \prec w_n$$

$$\lim u_n = \lim w_n = l \quad \text{و :}$$

$$\lim v_n = l \quad \text{فإن :}$$

(2) إذا وجد عدد صحيح طبيعي N حيث :

$$\forall n \succ N \quad u_n \prec v_n$$

$$\lim u_n = +\infty \quad \text{و :}$$

$$\lim v_n = +\infty \quad \text{فإن :}$$

$$\forall n \succ N \quad u_n \prec v_n \quad (3)$$

$$\lim v_n = -\infty \quad \text{و :}$$

$$\lim u_n = -\infty \quad \text{فإن :}$$

(4) إذا وجد N من \mathbb{N} حيث :

$$\forall n \succ N \quad |u_n| \prec v_n$$

$$\lim v_n = 0 \quad \text{و :}$$

$$\lim u_n = 0 \quad \text{فإن :}$$

(5) إذا وجد N من \mathbb{N} حيث :

$$\forall n \succ N \quad |u_n - l| \prec v_n$$

$$\lim v_n = 0 \quad \text{و :}$$

$$\lim u_n = l \quad \text{فإن :}$$

(6) إذا وجد N من \mathbb{N} حيث :

$$\forall n \succ N \quad |u_n - l| \prec \frac{k}{n}$$

$$\lim u_n = l \quad \text{فإن :}$$

تعريف :

نقول أن المتتالية (u_n) متقاربة إذا وفقط إذا كانت لها نهاية منتهية

ونقول أنها متباعدة إذا كانت غير متقاربة.

خاصيات :

إذا كانت $\lim u_n = l$ و $\lim v_n = l'$

فإن : $\lim u_n + v_n = l + l'$

$\lim u_n \cdot v_n = l \cdot l'$

$\lim \frac{u_n}{v_n} = \frac{l}{l'} \quad (l' \neq 0)$

مبرهنة :

كل متتالية متقاربة وموجبة تكون نهايتها موجبة.

مبرهنة :

إذا كان لك $u_n < v_n$ ، $N < n$

و $\lim u_n = l$ و $\lim v_n = l'$

فإن : $l < l'$

مبرهنة :

كل متتالية تزايدية ومكبورة هي متتالية متقاربة.
كل متتالية تناقصية ومصغورة هي متتالية متقاربة.

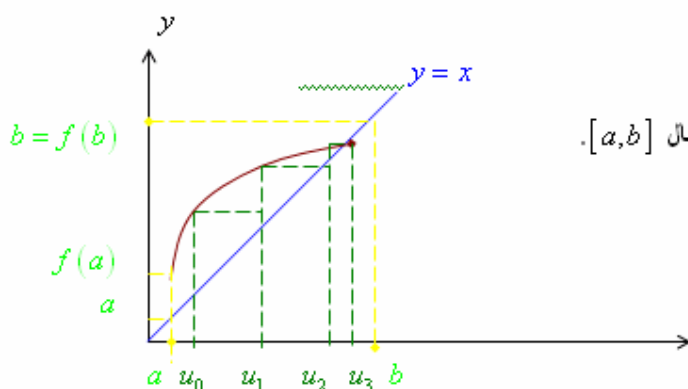
استنتاج :

- كل متتالية موجبة وتناقصية هي متتالية متقاربة.
- كل متتالية سالبة وتزايدية هي متتالية متقاربة.

متتاليات من نوع : $u_{n+1} = f(u_n)$

مثال ① :

ليكن (f) المنحنى الممثل للدالة f على المجال $[a, b]$.



لتكن (u_n) المتتالية المعرفة بـ :

$$\begin{cases} u_0 \in [a, b] \\ \forall n \in \mathbb{N} ; u_{n+1} = f(u_n) \end{cases}$$

نلاحظ أن : $\forall x \in [a, b] ; f(x) \in [a, b]$

يعني أن : $f([a, b]) \subset [a, b]$

وبما أن : (ℓ_f) يوجد فوق المنصف.

فإن : $\forall x \in [a, b] ; f(x) \geq x$

لنبين بالترجع أن (u_n) مكبورة.

- من أجل $n=0$ $a \leq u_0 \leq b$

نفترض أن : $a \leq u_n \leq b$

ونبين أن : $a \leq u_{n+1} \leq b$

نعلم أن لكل x من $[a, b]$ ، $f(x) \in [a, b]$

وبما أن : $a \leq u_0 \leq b$

فإن : $a \leq f(u_n) \leq b$ إذن : $a \leq u_{n+1} \leq b$

ومنه : $\forall n \in \mathbb{N} ; a \leq u_n \leq b$ ①

ولنبين أن : (u_n) تزايدية.

لدينا : $\forall x \in [a, b] f(x) \geq x$

و : $\forall n \in \mathbb{N} a \leq u_n \leq b$

إذن : $\forall n \in \mathbb{N} f(u_n) \geq u_n$

إذن : $\forall n \in \mathbb{N} u_{n+1} \geq u_n$

وبالتالي : (u_n) تزايدية ②.

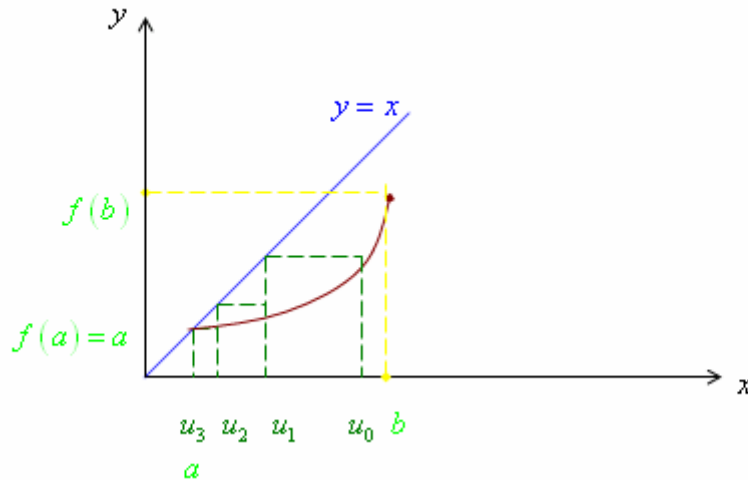
ومن ① و ② نستنتج أن : (u_n) متقاربة.

إذن لها نهاية منتهية l حيث $l = f(l)$

ومنه نهاية (u_n) هي حل المعادلة :

$$a \leq x \leq b ; f(x) = x$$

مثال ② :



لتكن (u_n) المتتالية المعرفة بـ :

$$\begin{cases} u_0 \in [a, b] \\ \forall n \in \mathbb{N} ; u_{n+1} = f(u_n) \end{cases}$$

لدينا : $\forall x \in [a, b] ; f(x) \in [a, b]$

يعني أن : $a \leq x \leq b \Rightarrow a \leq f(x) \leq b$

ولدينا : $\forall x \in [a, b] ; f(x) \leq x$

لنبين بالترجع أن : (u_n) مصغورة.

- من أجل $n=0$ $a \leq u_0 \leq b$

نفترض أن : $a \leq u_n \leq b$

ونبين أن : $a \leq u_{n+1} \leq b$

نعلم أن لكل x من $[a, b]$ ، $f(x) \in [a, b]$

وبما أن : $a \leq u_0 \leq b$

فإن : $a \leq f(u_n) \leq b$

إذن : $a \leq u_{n+1} \leq b$

ومنه : $\forall n \in \mathbb{N} ; a \leq u_n \leq b$ ①

لنبين أن : (u_n) تناقصية.

لدينا : $\forall x \in [a, b] f(x) \leq x$

و : $\forall n \in \mathbb{N} a \leq u_n \leq b$

$\forall n \in \mathbb{N} f(u_n) \leq u_n$

إذن : $\forall n \in \mathbb{N} u_{n+1} \leq u_n$

وبالتالي : (u_n) تناقصية ②.

ومن ① و ② نستنتج أن : (u_n) متقاربة.

إذن لها نهاية منتهية l حيث $l = f(l)$

ومنه نهاية (u_n) هي حل المعادلة :

$$a \leq x \leq b ; \quad f(x) = x$$

خلاصة وخاصة :

إذا كانت (u_n) متتالية معرفة بالعلاقة $u_{n+1} = f(u_n)$

و f متصلة على مجال I

مع : $f(I) \subset I$ و $u_0 \in I$

إذا كانت (u_n) متقاربة.

فإن نهايتها هي حل المعادلة $f(x) = x$ ، $x \in I$

مثال :

$$\begin{cases} u_0 = 1 \\ \forall n \in \mathbb{N} ; u_{n+1} = \frac{1}{2} u_n + 1 \end{cases}$$

(1) مثل مبيانيا الدالة المعرفة بـ :

$$f(x) = \frac{1}{2} x + 1$$

(2) بين أن : $\forall x \in [0, 2] , f(x) \in [0, 2]$ ،

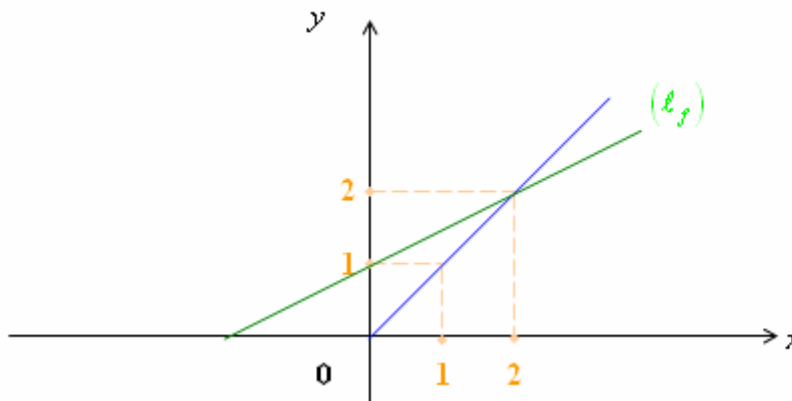
(3) بين أن : $\forall x \in [0, 2] , f(x) \geq x$ ،

(4) بين أن : (u_n) مكبورة.

(5) بين أن : (u_n) تزايدية.

(6) استنتج نهاية (u_n) .

الجواب :
(1)



(1) بما أن f متصلة وتزايدية على $[0, 2]$.

فإن : $f([0, 2]) = [1, 2] \subset [0, 2]$

ومنه : $\forall x \in [0, 2] , f(x) \in [0, 2]$ ،

(2) لنبين : $\forall x \in [0, 2] , f(x) \geq x$ ،

على المجال $[0, 2]$ ، ℓ_f يوجد فوق المنصف.

ومنه : $\forall x \in [0, 2] , f(x) \geq x$

(3) من أجل $n=0$ لدينا : $0 \leq u_0 \leq 2$

نفترض أن : $0 \leq u_n \leq 2$

بما أن : $\forall x \in [0, 2] , f(x) \in [0, 2]$

فإن : $0 \leq f(u_n) \leq 2$

أي : $0 \leq u_{n+1} \leq 2$

ومنه : $\forall x \in [0, 2] , 0 \leq u_n \leq 2$

إذن : (u_n) مكبورة.

(4) لدينا : $\forall x \in [0, 2] , f(x) \in [0, 2]$

و : $f(x) \geq x$

وبما أن : $\forall n \in \mathbb{N} , u_n \in [0, 2]$

فإن : $\forall n \in \mathbb{N} , f(u_n) \geq u_n$

ومنه : $u_{n+1} \geq u_n$

إذن : (u_n) تزايدية.

(5) بما أن : (u_n) تزايدية ومكبورة .

فإنها متقاربة.

ونهايتها هي حل المعادلة :

$$x \in [0, 2] , f(x) = x$$

$$f(x) = x \Leftrightarrow \frac{1}{2}x + 1 = x$$

$$\Leftrightarrow x = 2$$

وبما أن : $2 \in [0, 2]$

فإن : $\lim u_n = 2$

تمرين تطبيقي :

لتكن (u_n) المتتالية المعرفة بـ :

$$\begin{cases} u_0 = -1 \\ \forall n \in \mathbb{N} ; u_{n+1} = \frac{2 \cdot u_n + 3}{u_n + 2} \end{cases}$$

(1) أدرس تغيرات الدالة f المعرفة بـ : $f(x) = \frac{2x + 3}{x + 2}$

ثم أنشئ (ℓ_f) المنحنى الممثل للدالة f في معلم متعامد ممنظم ، ثم انشئ الحدود الأولى للمتتالية (u_n) .

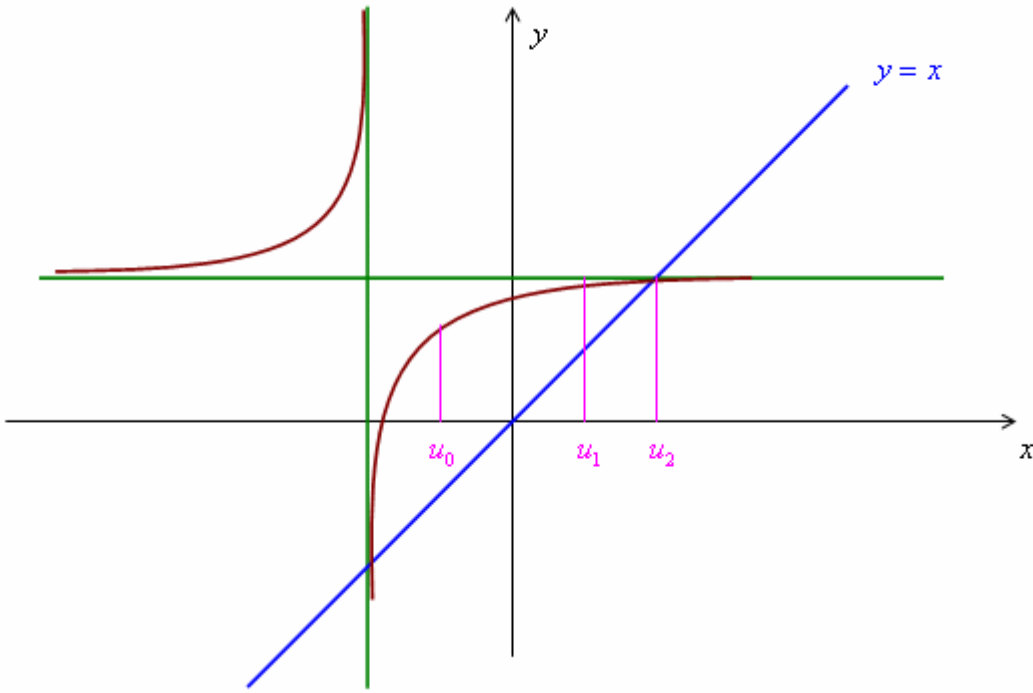
(2) بين أن : $\forall n \in \mathbb{N} ; -1 \leq u_n \leq \sqrt{3}$

(3) استنتج رتبة (u_n) ، u_0 ، (u_n) متقاربة.

(4) حدد نهاية (u_n) .

الجواب :

(1)



(1) لنبين أن : $\forall n \in \mathbb{N} ; -1 \leq u_n \leq \sqrt{3}$

من أجل $n=0$ ، لدينا : $u_0 = -1$

$$-1 \leq u_0 \leq \sqrt{3}$$

من أجل $n=1$ ، لدينا : $u_1 = 1$

$$-1 \leq u_1 \leq \sqrt{3} \quad \text{إذن :}$$

$$-1 \leq u_n \leq \sqrt{3} \quad \text{نفترض أن :}$$

$$-1 \leq u_{n+1} \leq \sqrt{3} \quad \text{ونبين أن :}$$

$$-1 \leq u_n \leq \sqrt{3} \quad \text{لدينا :}$$

$$f(-1) \leq f(u_n) \leq f(\sqrt{3}) \quad \text{إذن :}$$

$$1 \leq f(u_n) \leq \sqrt{3} \quad \text{إذن :}$$

$$1 \leq u_{n+1} \leq \sqrt{3} \quad \text{إذن :}$$

$$-1 \leq u_{n+1} \leq \sqrt{3} \quad \text{ومنه :}$$

$$-1 \leq u_n \leq \sqrt{3} \quad \text{وبالتالي :}$$

تمارين

تمرين (1) لتكن المتتاليتين (u_n) و (v_n) بحيث : $\begin{cases} u_0 = 2 \\ u_{n+1} = \frac{-1+2u_n}{u_n} \end{cases}$ و $v_n = \frac{1}{u_n - 1}$

(1) بين أن (v_n) متتالية حسابية .

(2) عبر عن v_n ثم u_n بدلالة n .

تمرين (2) $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ متتالية حيث : $u_0 = 0; u_1 = 1; u_{n+2} = \frac{1}{2}(u_{n+1} + u_n)$

نضع : $v_n = u_{n+1} - u_n$ لكل n من \mathbb{N} .

(أ) بين أن (v_n) متتالية هندسية وحدد أساسها وحدها الأول.

(ب) عبر عن v_n ثم u_n بدلالة n .

تمرين (3) (u_n) متتالية هندسية حيث : $u_2 = 2$ و $u_5 = \frac{2}{27}$.

(1) حدد أساس المتتالية (u_n) .

(2) (v_n) متتالية حيث : $v_n = 3^n u_n - n$ لكل n من \mathbb{N}^* .

(أ) بين أن (v_n) متتالية حسابية وحدد أساسها وحدها الأول.

(ب) احسب بدلالة n المجموع : $S = 3^1 u_1 + 3^2 u_2 + 3^3 u_3 + \dots + 3^n u_n$

تمرين (4) نعتبر المتتالية العددية (u_n) المعرفة ب : $\begin{cases} u_0 = 1 \\ u_{n+1} = u_n \sqrt[3]{\frac{4}{2+u_n^3}}; n \in \mathbb{N} \end{cases}$.

(1) بين بالترجع أن : $u_n > 0$ و $u_n \leq \sqrt[3]{2}$ $\forall n \in \mathbb{N}$.

(2) بين أن (u_n) تزايدية ثم استنتج أنها متقاربة .

(3) نعتبر المتتالية العددية (v_n) المعرفة ب : $v_n = \frac{2}{u_n^3} - 1; n \in \mathbb{N}$

(أ) بين أن (v_n) متتالية هندسية أساسها $\frac{1}{2}$

(ب) حدد (v_n) ثم (u_n) بدلالة n .

(ج) احسب : $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n$.

(د) احسب بدلالة n المجموع : $S = 2 \left[\left(\frac{1}{u_0} \right)^3 + \left(\frac{1}{u_1} \right)^3 + \dots + \left(\frac{1}{u_{n-1}} \right)^3 \right]$

تمرين 5) لتكن f الدالة العددية المعرفة على $I = [2, 3]$ ب : $f(x) = \frac{5x+2}{x+3}$.

1) أ) اعط جدول تغيرات f على I ب) بين أن : $f(I) \subset I$.

2) نعتبر المتتالية العددية (u_n) المعرفة ب : $\begin{cases} u = 2 \\ u_{n+1} = \frac{5u_n + 2}{u_n + 3}; n \in \mathbb{N} \end{cases}$

أ) بين أن $\forall n \in \mathbb{N} : 2 \leq u_n \leq 3$

ب) بين أن (u_n) متتالية تزايدية .

ج) استنتج أن (u_n) متقاربة و حدد نهايتها .

تمرين 6) نعتبر المتتالية (u_n) المعرفة ب : $u_0 = 1$ و $\forall n \in \mathbb{N} : u_{n+1} = \frac{2+3u_n^2}{1+3u_n}$

1) أ) بين أن : $\forall n \in \mathbb{N} : 2 - u_{n+1} = \frac{3u_n}{1+3u_n} (2 - u_n)$

ب) بين بالترجع أن : $\forall n \in \mathbb{N} : 0 < u_n < 2$

ج) بين أن (u_n) تزايدية ثم استنتج أنها متقاربة .

2) أ) بين أن : $\forall n \in \mathbb{N} : \frac{3u_n}{1+3u_n} < \frac{6}{7}$.

ب) استنتج أن : $\forall n \in \mathbb{N} : 2 - u_n < \left(\frac{6}{7}\right)^n$

ج) احسب : $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n$.

تمرين 7) لتكن f الدالة العددية المعرفة على \mathbb{R}^+ ب : $f(x) = \frac{x}{1+\sqrt[3]{x}}$.

1) أ) بين أن f تقابل من \mathbb{R}^+ نحو \mathbb{R}^+ .

ب) بين أن : $\forall x \in \mathbb{R}^+ : f(x) \leq x$.

ج) حدد صورة المجال $[0, 1]$ بالدالة f .

2) لتكن (u_n) المتتالية العددية المعرفة ب : $\begin{cases} u_0 = \frac{1}{2} \\ u_{n+1} = f(u_n), n \in \mathbb{N} \end{cases}$

أ) تحقق أن : $\forall n \in \mathbb{N} : 0 \leq u_n \leq 1$.

ب) استنتج أن (u_n) متقاربة ثم احسب $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n$.

الدوال الأصلية

1- تعريف :

لتكن f دالة عددية معرفة على مجال I . نقول أن الدالة F دالة أصلية للدالة f على I إذا وفقط إذا كان :
 F دالة قابلة للاشتقاق على المجال I .
 ولكل x من I : $F'(x) = f(x)$

مثال :

1- لتكن $F(x) = x^2 + x + 1$
 إذن : $F'(x) = 2x + 1$
 إذن : الدالة F هي دالة أصلية للدالة f المعرفة بـ : $f(x) = 2x + 1$

2- حدد دالة أصلية لكل دالة من الدوال التالية :

-a $f(x) = 2$
 $F(x) = 2x + C \quad / \quad C \in \mathbb{R}$

-b $f(x) = x$
 $F(x) = \frac{1}{2} x^2 + C$

-c $f(x) = x^3$
 $F(x) = \frac{1}{4} x^4 + C$

-d $f(x) = x^n \quad / \quad n \in \mathbb{N}^*$
 $F(x) = \frac{1}{n+1} x^{n+1} + C$

-e $f(x) = x^r \quad ; \quad r \in \mathbb{N}^* - \{-1\}$
 $F(x) = \frac{1}{r+1} x^{r+1} + C$

-f $f(x) = \sqrt{x}$
 $= x^{\frac{1}{2}}$
 $F(x) = \frac{2}{3} x^{\frac{3}{2}} + Cte$

-g $f(x) = (x^2 + 1)^3 (2x)$
 $F(x) = \frac{1}{4} (x^2 + 1)^4 + Cte$

الأصلية : $u^r \cdot u'$: $\frac{1}{r+1} u^{r+1} + C$

2- خاصية :

لتكن f دالة عددية.
إذا كانت F دالة أصلية للدالة f على مجال I فإن مجموعة الدالة الأصلية للدالة f على I هي :
حيث $F + \lambda$ حيث $\lambda \in \mathbb{R}$.

برهان :

لتكن F دالة أصلية للدالة f على I و λ عدد حقيقي.
لدينا : $(F + \lambda)' = F' = f$
إذن : $F + \lambda$ هي أيضا دالة أصلية للدالة f على I .
ومنه : مجموعة الدوال الأصلية للدالة f على I هي $F + \lambda$.

3- خاصية :

لتكن f دالة عددية تقبل دالة أصلية على I .
ليكن x_0 من I و $y_0 \in \mathbb{R}$ عنصر حقيقي.
توجد دالة أصلية وحيدة F للدالة f على I .
حيث : $F(x_0) = y_0$

أمثلة :

حدد الدالة الأصلية للدالة f والتي تحقق الشرط $F(x_0) = y_0$.

$$\begin{aligned} \text{1-} \quad f(x) &= x + 1 & F(2) &= 1 \\ \text{لدينا :} \quad F(x) &= \frac{1}{2} x^2 + x + C = 1 \\ \text{وبما أن :} \quad F(2) &= 1 \\ \text{فإن :} \quad \frac{1}{2} x^2 + x + C &= 1 \\ 2 + 2 + C &= 1 \\ C &= -3 & \text{ومنه :} \end{aligned}$$

$$\text{2-} \quad f(x) = \frac{2}{x^2 + 1} \quad F(0) = 0$$

$$\begin{aligned} \text{لدينا :} \quad F(x) &= 2 \operatorname{Arc} \tan x + C \\ \text{وبما أن :} \quad F(0) &= 0 \\ \text{فإن :} \quad C &= 0 \\ \text{إذن :} \quad F(x) &= 2 \operatorname{Arc} \tan x \end{aligned}$$

$$\text{3-} \quad f(x) = \cos 2x \quad F\left(\frac{\pi}{2}\right) = 0$$

$$\begin{aligned} \text{لدينا :} \quad F(x) &= \frac{1}{2} \sin (2x) + C \\ \text{وبما أن :} \quad F\left(\frac{\pi}{2}\right) &= 0 \\ \text{فإن :} \quad C &= 0 \end{aligned}$$

$$F(x) = \frac{1}{2} \sin 2x$$

4- خاصية :

- إذا كانت F دالة أصلية للدالة f على I .
 و G دالة أصلية للدالة g على I .
 فإن : الدالة $F+G$ دالة أصلية للدالة $f+g$ على I .

5- خاصية :

كل دالة متصلة على مجال I تقبل دالة أصلية .

ملاحظة وخاصة :

إذا كانت F و G دالتين أصليتين للدالة f على I ، فإنه يوجد عدد حقيقي λ
 حيث : $F - G = \lambda$

6- جدول الدوال الأصلية الاعتيادية :

الدالة f	الدالة F (الأصلية)	ملاحظات
1	$x + C$	$C \in \mathbb{R}$
x	$\frac{1}{2}x^2 + C$	
x^n	$\frac{1}{n+1}x^{n+1} + C$	$n \in \mathbb{N}$
x^r	$\frac{1}{r+1}x^{r+1} + C$	$r \in \mathbb{Q} - \{-1\}$
$u^n \cdot u'$	$\frac{1}{n+1}u^{n+1} + C$	$n \in \mathbb{N}$
$u^r \cdot u'$	$\frac{1}{r+1}u^{r+1} + C$	$r \in \mathbb{Q} - \{-1\}$
$\frac{1}{x^2 + 1}$	$\text{Arc tan } x + C$	
$\cos x$	$\sin x + C$	
$\sin x$	$-\cos x + C$	
$\cos(ax+b)$	$\frac{1}{a}\sin(ax+b) + C$	$a \neq 0$
$\sin(ax+b)$	$-\frac{1}{a}\cos(ax+b) + C$	$a \neq 0$
$1 + \tan^2(x) = \frac{1}{\cos^2 x}$	$\tan x + C$	$x \neq \frac{\pi}{2} + k\pi$

تطبيقات :

حدد دالة أصلية للدالة f في الحالات التالية :

$$f(x) = \frac{x^2 - 1}{x^2 + 1} \quad -1$$

$$= \frac{x^2 + 1 - 2}{x^2 + 1}$$

$$= \frac{-2}{x^2 + 1} + 1$$

$$F(x) = x - 2 \operatorname{Arc} \tan x + C \quad \text{إذن :}$$

$$f(x) = x \sqrt[3]{x^2 + 1} \quad -2$$

$$f(x) = \frac{1}{2} 2x \sqrt[3]{x^2 + 1} \quad \text{لدينا :}$$

$$= \frac{1}{2} (x^2 + 1)^{\frac{1}{3}} (2x)$$

$$F(x) = \frac{1}{2} \frac{1}{\frac{1}{3} + 1} (x^2 + 1)^{\frac{1}{3} + 1} \quad \text{ومنه :}$$

$$= \frac{1}{3} \times \frac{3}{4} (x^2 + 1)^{\frac{4}{3}}$$

$$= \frac{3}{8} (x^2 + 1)^{\frac{4}{3}}$$

$$F(x) = \frac{3}{8} \sqrt[3]{x^2 + 1}^4 \quad \text{إذن :}$$

$$f(x) = (2x + 1) \sqrt{x^2 + x + 3} \quad -3$$

$$= (x^2 + x + 3)^{\frac{1}{2}} (2x + 1)$$

$$F(x) = \frac{2}{3} (x^2 + x + 3)^{\frac{3}{2}}$$

$$f(x) = \frac{\sin^3 x}{\cos^5 x} \quad -4$$

$$F(x) = \tan^3 x \cdot \frac{1}{\cos^2 x}$$

$$= \frac{1}{4} \tan^4 x$$

$$f(x) = \sqrt[3]{(x^2 + 1)^2} x \quad \text{لدينا :} \quad -5$$

$$f(x) = \frac{1}{2} (x^2 + 1)^{\frac{2}{3}} 2x$$

$$F(x) = \frac{1}{2} \frac{3}{5} (x^2 + 1)^{\frac{5}{3}} + C \quad \text{إذن :}$$

$$= \frac{3}{10} (x^2 + 1)^{\frac{5}{3}} + C$$

تمارين حول الاشتقاق & الدوال الأصلية

تمرين 1

A - أحسب الدالة المشتقة f' للدالة f بعد تحديد D_f و $D_{f'}$ في كل حالة من الحالات التالية :

$$f(x) = x\sqrt{x^2 - 4} \quad -4 \quad f(x) = \cos(x^3 - 6x) \quad -3 \quad f(x) = \frac{\sin x}{2\cos x - 1} \quad -2 \quad f(x) = \frac{x^2 - 2x}{(x+1)^2} \quad -1$$

$$f(x) = \sqrt[3]{2x+1}^2 \quad -6 \quad f(x) = \sqrt[3]{(2x+1)^2} \quad -5$$

تمرين 2

نعتبر الدالة f المعرفة على $[-1; +\infty[$ بـ $f(x) = \sqrt[3]{x+1}$

-1 حدد تقريبا للدالة f بدالة تالفية بجوار 0

-2 أعط قيمة مقربة لكل من $\sqrt[3]{1,003}$ و $\sqrt[3]{0,998}$

تمرين 3

حدد مجموعة الدوال الأصلية ومجالات تعريفها لكل دالة من الدوال التالية

$$f(x) = 3x^2 + \frac{1}{x^2} - 5 \quad -1 \quad f(x) = \frac{2x+2}{(x+1)^3} \quad -2$$

$$f(x) = (x^2 - 2x)\sqrt{x} \quad -4 \quad f(x) = \sqrt[3]{x-2} \quad -3$$

$$f(x) = (\cos x)^3 \quad -6 \quad f(x) = x \cos(x^2 + 3) \quad -5$$

$$f(x) = \frac{2x+1}{\sqrt{x+1}} \quad -7$$

تمرين 4

$$\begin{cases} f(x) = -x^2 + 2 & x \geq 1 \\ f(x) = 3x - 2 & x < 1 \end{cases} \quad \text{لتكن } f \text{ دالة عددية معرفة بـ}$$

-1 بين أن f تقبل دالة أصلية على $[0; 2]$

-2 حدد مجموعة الدوال الأصلية لـ f على $[0; 2]$

تمرين 5

$$\begin{cases} f(x) = x^2 \sin \frac{1}{x} & x \neq 0 \\ f(0) = 0 \end{cases} \quad \text{لتكن } f \text{ دالة عددية معرفة بـ}$$

بين أن f قابلة للاشتقاق في 0 وأن نهاية f' عند 0 غير موجودة

تمرين 6

لتكن f و F دالتين عدديتين معرفتين بـ

$$\begin{cases} f(x) = 2x \sin x - \cos \frac{1}{x} & x \neq 0 \\ f(0) = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} F(x) = x^2 \sin \frac{1}{x} & x \neq 0 \\ F(0) = 0 \end{cases}$$

-1 بين أن f غير متصلة في 0

-2 بين أن F دالة أصلية لـ f على \mathbb{R}

تمرين 7

نعتبر f دالة عددية لمتغير حقيقي حيث $f(x) = x(x+1)(x+2)(x+3)$

بين أن المعادلة $f'(x) = 0$ تقبل ثلاث حلول مختلفة في \mathbb{R}

الدوال اللوغاريتمية

I- دالة اللوغاريتم النبري :

1- تمهيد :

نعلم أن كل دالة متصلة على مجال I ، تقبل دالة أصلية على المجال I .
ونعلم ان الدالة الأصلية للدالة $(x \mapsto x^r)$ على المجال \mathbb{R}_+^* بحيث $r \in \mathbb{Q} - \{-1\}$ هي الدالة :

$$\left(x \mapsto \frac{x^{r+1}}{r+1} + C \right)$$

ولدينا : الدالة $\left(x \mapsto \frac{1}{x} \right)$ متصلة على \mathbb{R}_+^* إذن هذه الدالة تقبل دالة أصلية.

$$\frac{1}{x} = x^{-1} \quad \text{وبما أن :}$$

$$r = -1 \quad \text{فإن :}$$

فإنه لا يمكن استعمال التقنية السابقة لتحديد دالة أصلية لهذه الدالة .

2- تعريف :

الدالة الأصلية للدالة $\left(x \mapsto \frac{1}{x} \right)$ على \mathbb{R}_+^* والتي تنعدم في 1 تسمى **دالة اللوغاريتم النبري** ونرمز لها بـ \ln أو (Log) .

استنتاج :

$$\ln(1) = 0 \quad -1$$

$$\forall x \in \mathbb{R}_+^* ; \quad \ln'(x) = \frac{1}{x} \quad -2$$

$$\text{دالة اللوغاريتم النبري متصلة على } \mathbb{R}_+^* . \quad -3$$

$$\text{دالة اللوغاريتم النبري تزايدية قطعاً على } \mathbb{R}_+^* . \quad -4$$

$$\forall x, y \in \mathbb{R}_+^* \quad -5$$

$$\ln x = \ln y \Leftrightarrow x = y$$

$$x > y \Leftrightarrow \ln x > \ln y$$

$$\ln 1 = 0 \quad -6 \quad \text{لدينا :}$$

x	0	1	$+\infty$
$\ln'(x)$			+
$\ln x$		0	→

$$\begin{aligned} 1 < x &\Leftrightarrow \ln x > 0 \\ 0 < x < 1 &\Leftrightarrow \ln x < 0 \end{aligned} \quad \text{إذن :}$$

تطبيق :

حدد مجموعة تعريف الدالة f في الحالات التالية :

$$f(x) = \ln(x-1) + \ln(3-x) \quad -1$$

$$\begin{aligned} D_f &= \{x \in \mathbb{R} / x-1 > 0 \quad \text{و} \quad 3-x > 0\} \\ &= \{x \in \mathbb{R} / x > 1 \quad \text{و} \quad x < 3\} \quad \text{إذن :} \\ D_f &=]1, 3[\end{aligned}$$

$$f(x) = \ln(1-x) \quad -2$$

$$\begin{aligned} D_f &= \{x \in \mathbb{R} / 1-x > 0\} \\ &=]-\infty, 1[\end{aligned}$$

$$f(x) = \frac{x}{x-1} \quad -3$$

x	$-\infty$	0	1	$+\infty$
x	—	0	+	+
$x-1$	—	—	0	+
$\frac{x}{x-1}$	+	0	—	+

$$D_f =]-\infty, 0[\cup]1, +\infty[\quad \text{إذن :}$$

3- خاصيات :

$$\forall x, y \in \mathbb{R}_+^* ; \quad \ln(xy) = \ln x + \ln y \quad 1-3$$

برهان :

$$y = a \quad \text{نضع :}$$

$$u(x) = \ln(ax) \quad \text{و } u \text{ دالة حيث :}$$

$$u'(x) = a \ln'(ax) \quad \text{لدينا :}$$

$$= \frac{a}{ax} = \frac{1}{x}$$

$$\ln'(x) = \frac{1}{x} \quad \text{وبما أن :}$$

$$\left(x \mapsto \frac{1}{x} \right) \quad \text{فإن : } \ln x \text{ و } u \text{ دالتين أصليتين للدالة}$$

$$u(x) = \ln x + C \quad \text{إذن : يوجد عدد حقيقي } C \text{ بحيث :}$$

$$u(x) = \ln(ax) = \ln x + C \quad \text{إذن :}$$

$$u(1) = \ln a = 0 + C \quad \text{وبما أن :}$$

$$\ln a = C \quad \text{فإن :}$$

$$u(ax) = \ln a + \ln x \quad \text{إذن :}$$

$$\forall x, y \in \mathbb{R}_+^* ; \quad \ln(xy) = \ln x + \ln y \quad \text{ومنه :}$$

$$\forall x \in \mathbb{R}_+^* ; \quad \ln \frac{1}{x} = -\ln x \quad \text{: 2-3}$$

برهان :

$$\forall x \in \mathbb{R}_+^*$$

لدينا :

$$0 = \ln 1 = \ln \frac{x}{x}$$

$$= \ln \left(x \times \frac{1}{x} \right)$$

$$= \ln x + \ln \frac{1}{x}$$

$$\forall x \in \mathbb{R}_+^* ; \quad \ln \frac{1}{x} = -\ln x \quad \text{إذن :}$$

: 3-3

$$\forall x, y \in \mathbb{R}_+^* ; \quad \ln \frac{x}{y} = \ln x - \ln y$$

$$\forall n \in \mathbb{N}, \forall x \in \mathbb{R}_+^* ; \quad \ln x^n = n \ln x \quad \text{: 4-3}$$

برهان :

من أجل $n=0$

$$\begin{aligned} \ln x^0 &= \ln 1 = 0 \\ &= 0 \ln x \end{aligned}$$

من أجل $n=1$

$$\ln x^1 = 1 \ln x$$

من أجل $n=2$

$$\begin{aligned} \ln x^2 &= \ln x + \ln x \\ &= 2 \ln x \end{aligned}$$

$$\ln x^n = n \ln x \quad \text{نفترض أن :}$$

$$\ln x^{n+1} = (n+1) \ln x \quad \text{ونبين أن :}$$

$$\ln x^{n+1} = \ln x^n \times x \quad \text{لدينا :}$$

$$= \ln x^n + \ln x$$

$$= n \ln x + \ln x$$

$$= (n+1) \ln x$$

$$\forall n \in \mathbb{N}, \forall x \in \mathbb{R}_+^* ; \quad \ln x^n = n \ln x$$

وبالتالي :

$$\forall r \in \mathbb{Q}, \forall x \in \mathbb{R}_+^* ; \quad \ln x^r = r \ln x \quad : 5-3$$

برهان :

$$r = \frac{p}{q} \quad \text{نضع :}$$

$$y = x^r \quad \text{و :}$$

$$y = x^{\frac{p}{q}} \quad \text{إن :}$$

$$y^q = x^p \quad \text{إن :}$$

$$\ln y^q = \ln x^p$$

$$q \ln y = p \ln x$$

$$\ln y = \frac{p}{q} \ln x$$

إن :

$$\ln x^r = r \ln x$$

حالات خاصة :

لكل x من \mathbb{R}_+^* :

$$\ln \sqrt{x} = \frac{1}{2} \ln x$$

$$\ln \sqrt[3]{x} = \frac{1}{3} \ln x$$

$$\ln \sqrt[n]{x} = \frac{1}{n} \ln x$$

4- دراسة الدالة f المعرفة بـ $f(x) = \ln x$

1-4 : مجموعة التعريف :

$$D_f =]0, +\infty[= \mathbb{R}_+^*$$

2-4 : النهايات :

تمهيد :

$$\forall n \in \mathbb{N} ; \quad \ln 2^n = n \ln 2 \quad \text{لدينا :}$$

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} 2^n = +\infty$$

$$\ln 2 > 0 \quad \text{و :}$$

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} n \ln 2 = +\infty \quad \text{إن :}$$

ومنه :

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \ln x = +\infty$$

- لنحسب $\lim_{x \rightarrow 0^+} \ln x$

نضع : $x = \frac{1}{t}$

$$(x \rightarrow 0^+) \Leftrightarrow (t \rightarrow +\infty)$$

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 0^+} \ln x &= \lim_{t \rightarrow +\infty} \ln \frac{1}{t} \\ &= \lim_{t \rightarrow +\infty} -\ln t = -\infty \end{aligned}$$

إذن :

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \ln x = -\infty$$

3-4 : الفرعين النهائيين :

لدينا : $\lim_{x \rightarrow 0^+} \ln x = -\infty$

إذن : محور الأرتايب مقرب لـ ℓ_f .

ولدينا : $\lim_{x \rightarrow +\infty} \ln x = +\infty$

- لنحسب $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln x}{x}$

لتكن : u الدالة المعرفة على \mathbb{R}_+^* بـ : $u(x) = x - \ln x$

لدينا : $u'(x) = 1 - \frac{1}{x} = \frac{x-1}{x}$

x	0	1	$+\infty$
$u'(x)$		0	
$u(x)$		1	

$$u(1) = 1$$

إذن : $\forall x \in \mathbb{R}_+^* \quad u(x) \geq 1$

إذن : $\forall x \in \mathbb{R}_+^* \quad u(x) > 0$

إذن : $\forall x \in \mathbb{R}_+^* \quad x - \ln x > 0$

إذن : $\forall x \in \mathbb{R}_+^* \quad x > \ln x$

إذن : $\forall x \in \mathbb{R}_+^* \quad \sqrt{x} > \ln \sqrt{x}$

إذن : $\forall x \in \mathbb{R}_+^* \quad ; \quad \frac{1}{2} \ln x < \sqrt{x}$

$$\forall x \in \mathbb{R}_+^* ; \quad \frac{\ln x}{x} < \frac{2\sqrt{x}}{x} \quad \text{إذن :}$$

$$\forall x \in [1, +\infty[; \quad 0 < \frac{\ln x}{x} < \frac{2}{\sqrt{x}} \quad \text{إذن :}$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2}{\sqrt{x}} = 0 \quad \text{وبما أن :}$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln x}{x} = 0 \quad \text{فإن :}$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln x}{x} = 0$$

إذن :

إذن : (ℓ_f) يقبل فرعاً شلجياً اتجاهه محور الأفصيل.

4-4 : الرتبة :

$$\forall x \in \mathbb{R}_+^* , \quad \ln'(x) = \frac{1}{x} > 0 \quad \text{لدينا :}$$

إذن : الدالة f متصلة وتزايدية قطعاً على \mathbb{R}_+^* .

إذن : f تقابل من \mathbb{R}_+^* نحو \mathbb{R} .

وبما أن : $1 \in \mathbb{R}$

فإنه يوجد عدد حقيقي وحيد من \mathbb{R}_+^* ونرمز له بـ e حيث $\ln e = 1$.
بحيث : $e \approx 2,718$

جدول التغيرات : f

x	0	1	e	$+\infty$
$u'(x)$			+	
$u(x)$	$-\infty$	0	1	$+\infty$

5-4 : التقعر :

$$\forall x \in \mathbb{R}_+^* ; \quad f'(x) = \frac{-1}{x^2} \quad \text{لدينا :}$$

$$\forall x \in \mathbb{R}_+^* ; \quad f''(x) < 0 \quad \text{إذن :}$$

$$\text{إذن : } (\ell_f) \text{ مقعر.}$$

6-4 : معادلة المماس في النقطة 1.

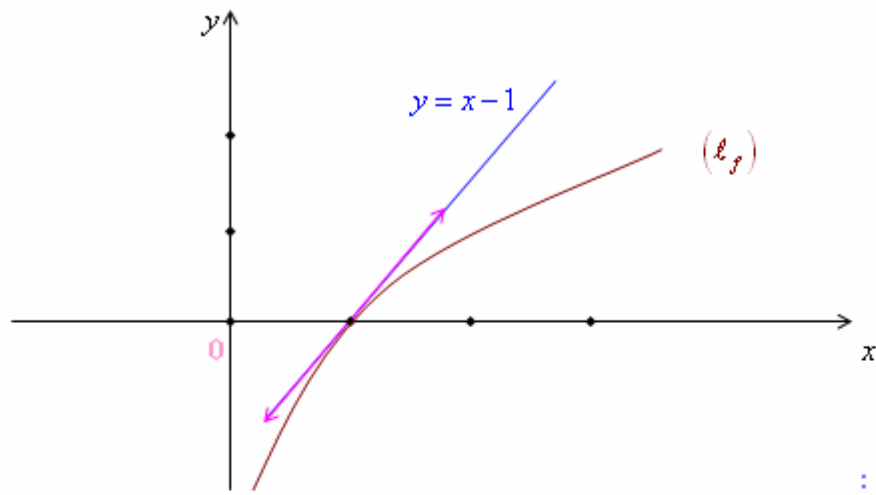
$$\ln'(1) = \frac{1}{1} = 1 \quad \text{لدينا :}$$

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{\ln x}{x-1} = 1 \quad \text{إذن :}$$

إذن : معادلة المماس لـ ℓ_f في 1 هي :

$$y = 1(x-1) + 0$$

$$y = x - 1$$



5- نهايات مهمة :

$\lim_{x \rightarrow 0^+} \ln x = -\infty$	-1
$\lim_{x \rightarrow +\infty} \ln x = +\infty$	-2
$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln x}{x} = 0$	-3
$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{\ln x}{x-1} = 1$	-4
$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(1+x)}{x} = 1$	-5
$\lim_{x \rightarrow 0^+} x \ln x = 0$	-6
$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln x}{x^n} = 0$	-7
$\lim_{x \rightarrow 0^+} x^n \ln x = 0$	-8

بالنسبة لـ -5 نضع :

$$x = t - 1$$

$$(x \rightarrow 0) \Leftrightarrow (t \rightarrow 1)$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(1+x)}{x} = \lim_{t \rightarrow 1} \frac{\ln t}{t-1} = 1$$

$$x = \frac{1}{t}$$

بالنسبة لـ -6 نضع :

$$(x \rightarrow 0^+) \Leftrightarrow (t \rightarrow +\infty)$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln x}{x^n} \quad , \quad n=2 \quad \text{من أجل}$$

بالنسبة لـ -7

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln x}{x^2} = \frac{1}{2} \frac{\ln x^2}{x^2}$$

$$= \lim_{X \rightarrow +\infty} \frac{1}{2} \frac{\ln X}{X} = 0$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} x^n \ln x = \lim_{x \rightarrow 0^+} x^{n-1} (x \ln x)$$

بالنسبة لـ -8 نضع :

$$= 0$$

$$\begin{aligned}\lim_{x \rightarrow 0^+} x \ln x &= \lim_{t \rightarrow +\infty} \frac{1}{t} \ln \frac{1}{t} \\ &= \lim_{t \rightarrow +\infty} -\frac{\ln t}{t} \\ &= 0\end{aligned}$$

إذن :

5- تعميم :

نعتبر الدالة المعرفة بـ : $f(x) = \ln(U(x))$

مجموعة تعريف الدالة f :

$$D_f = \{x \in D_f \mid U(x) > 0\}$$

النهايات :

$$\begin{aligned}\bullet \lim_{x \rightarrow x_0} U(x) = +\infty &\Rightarrow \begin{cases} \lim_{x \rightarrow x_0} \ln U(x) = +\infty \\ \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{\ln U(x)}{U(x)} = 0 \end{cases} \\ \bullet \lim_{x \rightarrow x_0} U(x) = 0^+ &\Rightarrow \begin{cases} \lim_{x \rightarrow x_0} \ln(U(x)) = -\infty \\ \lim_{x \rightarrow x_0} U(x) \ln U(x) = 0 \\ \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{\ln(1 + U(x))}{U(x)} = 1 \end{cases} \\ \bullet \lim_{x \rightarrow x_0} U(x) = 1 &\Rightarrow \begin{cases} \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{\ln(U(x))}{U(x) - 1} = 1 \end{cases}\end{aligned}$$

مشتقة الدالة f :

$$\begin{aligned}\text{إذا كانت } U \text{ قابلة للاشتقاق وموجبة قطعاً على } I. \\ \forall x \in I \ ; \ f'(x) = \ln'(U(x)) \times U'(x) \\ = \frac{U'(x)}{U(x)}\end{aligned}$$

مثال : 1-

$$f(x) = \ln(x^2 + 1)$$

$$f'(x) = \frac{2x}{x^2 + 1}$$

2-

$$f(x) = \ln \sqrt{x}$$

$$f'(x) = \frac{(\sqrt{x})'}{\sqrt{x}}$$

ط1

$$= \frac{1}{2x}$$

ط2

$$f(x) = \frac{1}{2} \ln x \quad \text{لدينا :}$$

$$f'(x) = \frac{1}{2x}$$

$$f(x) = \ln(\sqrt[4]{x^2+1})$$

-3

$$= \frac{1}{4} \ln(x^2+1)$$

$$f'(x) = \frac{1}{4} \frac{2x}{x^2+1}$$

إذن :

$$= \frac{x}{2(x^2+1)}$$

تعريف :

u دالة قابلة للاشتقاق على u ولا تنعدم.
الدالة $\frac{u'}{u}$ تسمى **المشتقة اللوغاريتمية** للدالة u على I .

استنتاج :

الدوال الأصلية للدالة $\left(x \mapsto \frac{u'(x)}{u(x)} \right)$ هي الدوال $x \mapsto \ln|u(x)| + C$ $C \in \mathbb{R}$

ملاحظة :

$$u(x) > 0 \Rightarrow f(x) = \ln u(x)$$

$$\Rightarrow f'(x) = \frac{u'(x)}{u(x)}$$

$$u(x) < 0 \Rightarrow f(x) = \ln |-u(x)|$$

$$\Rightarrow f'(x) = \frac{-u'(x)}{-u(x)} = \frac{u'(x)}{u(x)}$$

$$f(x) = \ln |u(x)| \quad \text{إذن : إذا كانت :}$$

$$f'(x) = \frac{u'(x)}{u(x)} \quad \text{فإن :}$$

مثال :

$$f(x) = \ln |x^2 - 3x + 1|$$

$$\Rightarrow f'(x) = \frac{2x - 3}{x^2 - 3x + 1}$$

تطبيقات :

تمرين 1 :

حدد مجموعة تعريف الدالة f في الحالات التالية :

$$f(x) = \ln(2x-1) \quad -1$$

$$D_f = \{x \in \mathbb{R} / 2x-1 > 0\}$$

$$= \left\{x \in \mathbb{R} / x > \frac{1}{2}\right\}$$

$$D_f = \left[\frac{1}{2}, +\infty\right[$$

$$f(x) = \frac{1}{\ln x} \quad -2$$

$$D_f = \{x \in \mathbb{R} / x > 0 \text{ و } \ln x \neq 0\}$$

$$= \{x \in \mathbb{R} / x > 0 \text{ و } x \neq 1\}$$

$$D_f =]0, 1[\cup]1, +\infty[\quad \text{إن :}$$

$$f(x) = \sqrt{\ln x} \quad -3$$

$$D_f = \{x \in \mathbb{R} / x > 0 \text{ و } \ln x \geq 0\}$$

$$= \{x \in \mathbb{R} / x > 0 \text{ و } x \geq 1\}$$

$$D_f = [1, +\infty[$$

$$f(x) = \sqrt{1 - \ln^2 x} \quad -4$$

ملاحظة :

$$\ln e = 1 \quad \text{لدينا :}$$

$$\text{إن : لكل } a \text{ من } \mathbb{R}.$$

$$a \ln e = a$$

$$\ln e^a = a \quad \text{إن :}$$

$$D_f = \{x \in \mathbb{R}_+^* / 1 - \ln^2 x \geq 0\} \quad \text{لدينا :}$$

$$(1 - \ln^2 x) = (1 - \ln x)(1 + \ln x) \quad \text{ولدينا :}$$

$$1 - \ln x = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \ln x = 1 = \ln e$$

$$\Leftrightarrow \quad x = e$$

$$1 + \ln x = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \ln x = -1 = \ln e^{-1}$$

$$\Leftrightarrow \quad x = \frac{1}{e}$$

x	0	$1/e$	e	$+\infty$
$1+\ln x$	-	0	+	+
$1-\ln x$	+	+	0	-
$1-\ln^2 x$	-	0	+	-

$$D_f = \left[\frac{1}{e}, e \right]$$

$$f(x) = \sqrt{\frac{\ln x + 1}{\ln x - 1}}$$

-5

x	0	$1/e$	e	$+\infty$
$\ln x + 1$	-	0	+	+
$\ln x - 1$	-	-	0	+
$\frac{\ln x + 1}{\ln x - 1}$	+	0	-	+

$$D_f = \left] 0, \frac{1}{e} \right] \cup]e, +\infty[$$

إذن :

تمرين 2 :

$$\ln x + \ln(x+1) = \ln 6 \quad -1$$

$$D_f = \{x \in \mathbb{R} / x > 0 \text{ و } x > -1\}$$

$$=]0, +\infty[$$

$$\forall x \in D_f ; \quad \Leftrightarrow E_1 \Leftrightarrow \ln(x \times (x+1)) = \ln 6$$

$$\Leftrightarrow x^2 + x = 6$$

$$\Leftrightarrow x^2 + x - 6 = 0$$

$$\Delta = 25$$

لدينا :

$$x_2 = 2$$

$$\text{و } x_1 = -3$$

إذن :

$$x > 0$$

وبما أن :

$$\underline{S = \{2\}}$$

فإن :

$$\ln^2 x - 3 \ln x + 2 = 0 \quad -2$$

$$D_f =]0, +\infty[\quad \text{لدينا :}$$

$$X = \ln x \quad \text{نضع :}$$

$$(E_2) \Leftrightarrow X^2 - 3X + 2 = 0 \quad \text{إذن :}$$

$$\Delta = 9 - 8 = 1 \quad \text{لدينا :}$$

$$x_2 = \frac{3+1}{2} = 2 \quad \text{أو} \quad x_1 = \frac{3-1}{2} = 1 \quad \text{إذن :}$$

$$\ln x = 2 \quad \text{أو} \quad \ln x = 1 \quad \text{إذن :}$$

$$x = e^2 \quad \text{أو} \quad x = e \quad \text{إذن :}$$

$$\underline{S = \{e, e^2\}} \quad \text{إذن :}$$

$$(E_3) : \ln x + \sqrt{\ln x} - 2 = 0 \quad -3$$

$$\begin{aligned} D_f &= \{x \in \mathbb{R}_+^* / \ln x \geq 0\} \\ &= \{x \in \mathbb{R}_+^* / x \geq 1\} \\ &= [1, +\infty[\end{aligned}$$

$$X \geq 0 \quad \text{حيث} \quad \sqrt{\ln x} = X \quad \text{نضع :}$$

$$X^2 + X - 2 = 0 \quad \text{إذن :}$$

$$\Delta = 1 + 8 = 9 \quad \text{لدينا :}$$

$$X = \frac{-1-3}{2} \quad \text{أو} \quad X = \frac{-1+3}{2} \quad \text{إذن :}$$

$$X = -2 \quad \text{أو} \quad X = 1$$

$$-2 < 0 \quad \text{وبما أن :}$$

$$X = 1 \quad \text{فإن :}$$

$$\sqrt{\ln x} = 1 \quad \text{إذن :}$$

$$\ln x = 1$$

$$x = e \quad \text{أي :}$$

$$S = \{e\} \quad \text{إذن :}$$

تمرين 3 :

لنحسب النهايات :

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln(1+x^2)}{x} \quad -1$$

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln\left(x^2 \left(\frac{1}{x^2} + 1\right)\right)}{x} &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln x^2 + \ln\left(1 + \frac{1}{x^2}\right)}{x} \\ &= \lim_{x \rightarrow +\infty} 2 \frac{\ln x}{x} + \frac{\ln\left(1 + \frac{1}{x^2}\right)}{x} \\ &= 0 \end{aligned}$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln(1+x)}{x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln(1+x)}{(1+x)} \cdot \frac{x+1}{x} \quad -2$$

$$X = x+1 \quad \text{نضع :}$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln(x+1)}{x+1} = \lim_{X \rightarrow +\infty} \frac{\ln X}{X} = 0 \quad \text{إذن :}$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1+x}{x} = 1 \quad \text{و :}$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln(1+x)}{x} = 0 \quad \text{إذن :}$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} x \ln^2 x = \lim_{x \rightarrow 0^+} (\sqrt{x} \ln x)^2 \quad -3 :$$

$$= \lim_{x \rightarrow 0^+} (\sqrt{x} \ln \sqrt{x^2})^2$$

$$= \lim_{x \rightarrow 0^+} 2^2 (\sqrt{x} \ln \sqrt{x})^2$$

$$= \lim_{x \rightarrow 0^+} 4 (\sqrt{x} \ln \sqrt{x})^2$$

$$= 0$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} x \ln^n(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} (\sqrt[n]{x} \ln \sqrt[n]{x^n})^n \quad , \quad n \in \mathbb{N} \quad -4 :$$

$$\sqrt[n]{x} = X \quad \text{نضع :}$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} x \ln^n(x) = n^n (X \ln X)^n \quad \text{إذن :}$$

$$= 0$$

مثال :

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} x \ln^3 x \quad \text{لنحسب :}$$

$$X = \sqrt[3]{x} \quad \text{نضع :}$$

$$x = X^3 \quad \text{إذن :}$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} x \ln^3 x = \lim_{X \rightarrow 0^+} X^3 \ln^3 X^3 \quad \text{لدينا :}$$

$$= \lim_{X \rightarrow 0^+} X^3 (3 \ln^3 X)^3$$

$$= \lim_{X \rightarrow 0^+} 27 (X \ln X)^3$$

$$= 0$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} x + \ln(x^2 + 1)$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} x + \ln(x^2 + 1) = \lim_{x \rightarrow -\infty} \left(1 + \frac{\ln(x^2 + 1)}{x} \right)$$

$$= \lim_{x \rightarrow -\infty} x \left(1 - 2 \frac{\ln(-x)}{-x} \right)$$

$$= \lim_{x \rightarrow -\infty} -t \left(1 - 2 \frac{\ln(t)}{t} \right)$$

$$= -\infty$$

نضع : $-x = t$

ط1 :

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} x + \ln(x^2 + 1) = \lim_{x \rightarrow -\infty} x + \ln \left(x^2 \left(1 + \frac{1}{x^2} \right) \right)$$

$$= \lim_{x \rightarrow -\infty} x + \ln x^2 + \ln \left(1 + \frac{1}{x^2} \right)$$

$$= \lim_{x \rightarrow -\infty} x \left(1 + \frac{\ln x^2}{x} \right) + \ln \left(1 + \frac{1}{x^2} \right)$$

$$= \lim_{x \rightarrow -\infty} x \left(1 - 2 \frac{\ln(-x)}{-x} \right) + \ln \left(1 + \frac{1}{x^2} \right)$$

$$= -\infty$$

ط2 :

تمرين 4 :

تذكير :

$$\ln'(x) = \frac{1}{x} \quad \text{لكل } x \text{ من } \mathbb{R}_+^*$$

$$f(x) = \ln U(x) \Rightarrow f'(x) = \frac{U'(x)}{U(x)}$$

$$f(x) = \ln |U(x)| \Rightarrow f'(x) = \frac{U'(x)}{U(x)}$$

$$f(x) = \ln \frac{x-1}{x+1}$$

$$D_f =]-\infty, -1[\cup]1, +\infty[$$

ط1 :

$$\forall x \in D_f \quad ; \quad f'(x) = \frac{\left(\frac{x-1}{x+1}\right)'}{\frac{x-1}{x+1}}$$

$$= \frac{2}{\frac{(x+1)^2}{\frac{x-1}{x+1}}}$$

$$= \frac{2}{(x-1)(x+1)} = \frac{2}{x^2-1}$$

ط2 :

$$\forall x \in D_f \quad ; \quad f(x) = \ln \left| \frac{x-1}{x+1} \right|$$

$$= \ln|x-1| - \ln|x+1|$$

$$\forall x \in D_f \quad ; \quad f'(x) = \frac{1}{x-1} - \frac{1}{x+1}$$

$$= \frac{(x+1) - (x-1)}{x^2-1}$$

$$= \frac{2}{x^2-1}$$

إذن :

$$f(x) = \frac{1 + \ln x}{x} \quad -2$$

$$f'(x) = \frac{(1 + \ln x)'x - (\ln x + 1)x'}{x^2}$$

$$= \frac{\frac{1}{x} \cdot x - 1 - \ln x}{x^2} = \frac{1 - 1 - \ln x}{x^2}$$

$$= \frac{-\ln x}{x^2}$$

$$f(x) = \ln |\ln x| \quad -3$$

$$D_f = \{x \in \mathbb{R} / x > 0 \text{ و } \ln x \neq 0\}$$

$$=]0, 1[\cup]1, +\infty[$$

$$\forall x \in D_f \quad ; \quad f'(x) = \frac{(\ln x)'}{\ln x}$$

$$= \frac{1}{\ln x}$$

$$= \frac{1}{x \ln x}$$

$$f(x) = \ln(x + \sqrt{x^2 + 1}) \quad -4$$

$$\forall x \in \mathbb{R} ; \quad x^2 + 1 > x^2$$

$$\forall x \in \mathbb{R} ; \quad \sqrt{x^2 + 1} > |x|$$

$$\forall x \in \mathbb{R} ; \quad \sqrt{x^2 + 1} + x > 0$$

$$D_f = \mathbb{R}$$

إذن :
ومنه :

$$\forall x \in D_f ; \quad f'(x) = \frac{1 + \frac{x}{\sqrt{x^2 + 1}}}{x + \sqrt{x^2 + 1}}$$

ولدينا :

$$= \frac{\frac{\sqrt{x^2 + 1} + x}{\sqrt{x^2 + 1}}}{x + \sqrt{x^2 + 1}}$$

$$f'(x) = \frac{1}{\sqrt{x^2 + 1}}$$

تمرين 5 :

$$f(x) = \frac{2 \ln|x|}{x^2}$$

$$D_f = \{x \in \mathbb{R} / x \neq 0 \text{ أو } |x| > 0\} \quad -1$$

$$= \mathbb{R}^*$$

$$\forall x \in D_f ; \quad -x \in D_f \quad *$$

$$f(-x) = \frac{2 \ln|-x|}{(-x)^2} \quad \text{و :}$$

$$= \frac{2 \ln|x|}{x^2}$$

$$f(-x) = f(x) \quad \text{ومنه :}$$

وبالتالي : f دالة زوجية.

-2 أ-

$$\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x > 0}} f(x) = \lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x > 0}} \frac{2 \ln(x)}{x^2}$$

$$= \lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x > 0}} \frac{2}{x^2} \cdot \ln(x)$$

$$= (+\infty) (-\infty)$$

$$= -\infty$$

$$\begin{aligned}\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2 \ln(x)}{x^2} \\ &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2}{x} \cdot \frac{\ln x}{x} \\ &= 0\end{aligned}$$

$$\forall x \in]0, +\infty[$$

* ب-

$$f'(x) = \left(\frac{2 \ln|x|}{x^2} \right)'$$

$$\begin{aligned}f'(x) &= \frac{(2 \ln x)' x^2 - (x^2)' (2 \ln x)}{x^4} \\ &= \frac{2x - 2x (2 \ln x)}{x^4} \\ &= \frac{2x (1 - 2 \ln x)}{x^4}\end{aligned}$$

$$\forall x \in]0, +\infty[; f'(x) = \frac{2 (1 - 2 \ln x)}{x^3} \quad \text{ومنه :}$$

$$\forall x \in \mathbb{R}_+^* ; f'(x) = 0 \Leftrightarrow 1 - 2 \ln x = 0 \quad *$$

$$\Leftrightarrow \ln x = \frac{1}{2}$$

$$\Leftrightarrow x = e^{\frac{1}{2}}$$

$$\Leftrightarrow x = \sqrt{e}$$

ومنه :

x	$-\infty$	$-\sqrt{e}$	0	\sqrt{e}	$+\infty$
$f'(x)$		+	-	+	-
$f(x)$	0	$\nearrow \frac{1}{e}$	$\searrow -\infty$	$\nearrow \frac{1}{e}$	$\searrow 0$

$$f(1) = 0 \quad \text{لدينا :}$$

$$f'(1) = 2 \quad \text{وبما أن :}$$

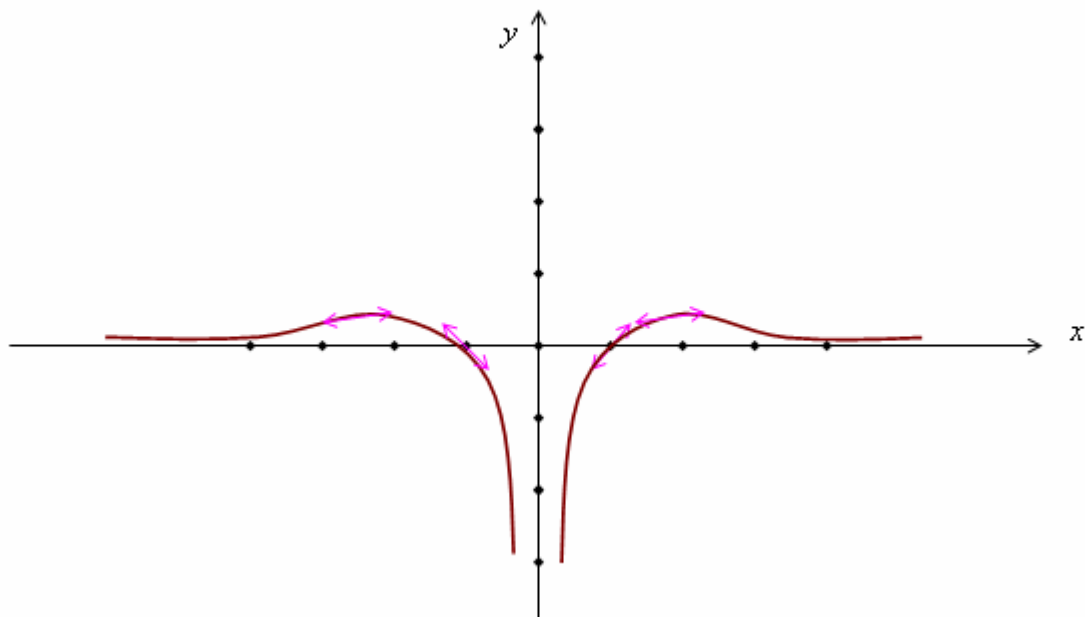
$$y = f'(x)(x-1) + f(1)$$

$$y = 2(x-1) \quad \text{فإن :}$$

$$y = 2x - 2$$

هي معادلة ديكارتية للمماس للمنحنى (ℓ_f) في النقطة A ذات الإحداثيات 1.

-3 أ-



دالة اللوغاريتم للأساس a :

تعريف :

لتكن a عددا حقيقيا موجبا قطعيا ومخالفا للعدد 1.

$$a \in \mathbb{R}_+^* - \{1\}$$

الدالة $\left(x \mapsto \frac{\ln x}{\ln a} \right)$ تسمى **دالة اللوغاريتم للأساس a** . ونرمز لها بـ \log_a .

$$\log_a(x) = \frac{\ln x}{\ln a} \quad \text{أي أن :}$$

مثال :

$$\log_2(x) = \frac{\ln x}{\ln 2} \quad -1$$

$$\log_e(x) = \frac{\ln x}{\ln e} = \ln x \quad -2$$

$$\log_{10}(x) = \frac{\ln x}{\ln 10} \quad -3$$

ملاحظة :

$$\log_a(a) = 1$$

خاصيات :

-1 لكل x و y من \mathbb{R}_+^* :

$$\log_a(xy) = \log_a(x) + \log_a(y)$$

$$\log_a\left(\frac{x}{y}\right) = \log_a(x) - \log_a(y)$$

$$\log_a\left(\frac{1}{x}\right) = -\log_a(x)$$

-2 لكل x من \mathbb{R}_+^* :

ولكل n من \mathbb{N} ،

ولكل r من \mathbb{Q} ،

$$\log_a(x^n) = n \log_a(x)$$

$$\log_a(x^r) = r \log_a(x)$$

دراسة الدالة \log_a

لتكن $f_a(x) = \log_a(x)$ الدالة المعرفة بـ :

مجموعة التعريف :

$$D_a =]0, +\infty[$$

النهايات :

الحالة 1 : $a > 1$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \log_a(x) = +\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \log_a(x) = -\infty$$

الحالة 2 : $0 < a < 1$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \log_a(x) = -\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \log_a(x) = +\infty$$

التغيرات :

لكل x من \mathbb{R}_+^*

$$(\log_a(x))' = \left(\frac{\ln x}{\ln a} \right)' = \frac{1}{x \ln a}$$

الحالة 1 : $a > 1$

x	0	$+\infty$
$f_a'(x)$		+
$f_a(x)$	$-\infty$	$+\infty$

الحالة 2 : $0 < a < 1$

x	0	$+\infty$
$f_a'(x)$		-
$f_a(x)$	$+\infty$	$-\infty$

الفروع اللانهائية :

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \log_a(x) = +\infty \quad \text{لدينا :}$$

إذن : $(x=0)$ مقارب لـ (ℓ_f) .

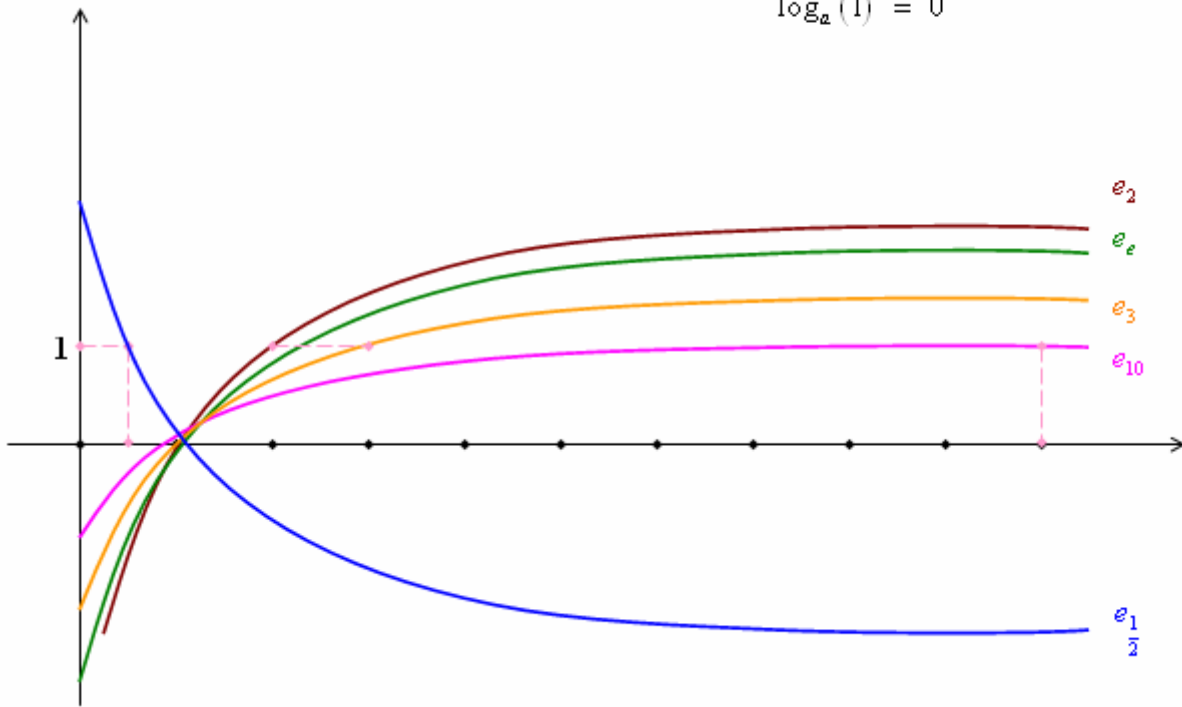
$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\log_a(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln x}{x} \cdot \frac{1}{\ln a} = 0 \quad \text{ولدينا :}$$

إذن : (ℓ_f) يقبل فرعاً شلجيمياً اتجاهه محور الأفاسيل بجوار $+\infty$.

التمثيل المبياني :

$$\forall a \in \mathbb{R}_+^* - \{1\} ; \log_a(a) = 1$$

$$\log_a(1) = 0$$



حالة خاصة :

إذا كانت $a = 10$

فإن الدالة \log_{10} تسمى **دالة اللوغاريتم العشري**، ونرمز لها بـ \log .

استنتاج :

$$\log_{10} = 1 \quad -1$$

$$\forall x \in \mathbb{R} \quad \log_{10^x} = x \quad -2$$

$$\forall x, y \in \mathbb{R}_+^* ; \log(xy) = \log x + \log y \quad -3$$

$$\log \frac{x}{y} = \log x - \log y \quad -4$$

ملاحظة :

$$\forall x \in \mathbb{R}_+^* ; \forall y \in \mathbb{R}$$

$$\log x = y \Leftrightarrow x = 10^y$$

تمرين 1

$$1- \text{ حدد } \lim_{x \rightarrow 0^+} (\sin x) \ln x \quad \lim_{x \rightarrow -\infty} x + \ln(x^2 + 1) \quad ; \quad \lim_{x \rightarrow 0^+} x (\ln x)^3$$

2- أدرس قابلية الاشتقاق و حدد $f'(x)$

$$f(x) = \frac{\ln x}{1 - (\ln x)^2} \quad (b) \quad f(x) = \ln(2x - \sqrt{x+1}) \quad (a)$$

3- حل في \mathbb{R} المعادلتين

$$\text{Log}_2(\sqrt{x+2}) + \text{Log}_4(x+3) = \frac{3}{2} \quad (b) \quad (\ln x)^3 - 2(\ln x)^2 + 3\ln x = 0 \quad (a)$$

تمرين 2 حدد مجموعة تعريف الدالة f في الحالات التالية

$$f(x) = \sqrt{1 - (\ln x)^2} \quad (d) \quad f(x) = \ln(\ln x) \quad (c) \quad f(x) = \ln(2x^2 - x + 3) \quad (b) \quad f(x) = \frac{3x}{1 - \ln x} \quad (a)$$

$$\ln(2x-3)(x+1) = \ln 3 \quad \ln(2x-3) + \ln(x+1) = \ln 3 \quad \text{المعادلات} \quad \mathbb{R} \text{ حل في} \quad \text{تمرين 3-1}$$

$$2\ln(2x-1) - 3\ln(1-x) = 0 \quad \ln|2x-3| + \ln|x+1| = \ln 3$$

2- حل في \mathbb{R} المتراجحات

$$\ln|x+1| < -\ln|3x+5|, \quad \ln(-3x^2 + x + 2) \geq 0 \quad \ln\left(\frac{x+2}{x-1}\right) > 0$$

$$\text{Log}_2 x = \frac{1}{2} + \text{Log}_4(2x+5) + \text{Log}_4 2 \quad \mathbb{R} \text{ حل في} \quad \text{المعادلة} \quad \text{3-}$$

$$\begin{cases} \text{Log}_x e + \text{Log}_y e = \frac{3}{2} \\ \ln xy = \frac{3}{2} \end{cases}$$

4- حل في \mathbb{R}^2 النظام

تمرين 4

أحسب النهايات التالية

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} (\ln x)^2 - x \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} x \ln\left(\frac{x-3}{x}\right) \quad \lim_{x \rightarrow 0^+} x(\ln x)^n \quad n \in \mathbb{N}^*; \quad \lim_{x \rightarrow -\infty} \ln \frac{x^2 - 2x}{x^2 + 3}$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln(x^2 + 2)}{x + 2}$$

تمرين 5

حدد مشتقة الدالة f في الحالات التالية

$$\begin{cases} f(x) = \frac{1 + \ln x}{1 - \ln x} & x > 0 \\ f(x) = x - 1 & x \leq 0 \end{cases} \quad (c) \quad f(x) = \ln(1 - \ln x) \quad (b) \quad ; \quad f(x) = \ln \frac{3+x}{4-x} \quad (a)$$

تمرين 6

نعتبر الدالة f المعرفة بـ $f(x) = \ln|\sqrt{x} - 1|$

$$1- \text{ حدد } D_f \text{ أحسب } \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) \quad ; \quad \lim_{x \rightarrow 1} f(x)$$

2- أحسب $f'(x)$ لكل x من $D_f - \{0\}$ و أعط جدول تغيرات الدالة f

3- أدرس اشتقاق f على يمين 0 و أول النتيجة هندسيا

4- أدرس الفروع اللانهائية لـ C_f

5- بين أن C_f يقبل نقطة انعطاف A تحديد إحداثيتها و أحسب معادلة المماس عند النقطة A

6- حدد نقطة تقاطع المنحنى C_f و محور الأفاسيل التي تختلف عن الأصل

7- أنشئ C_f نأخذ $\ln 2 \approx 0,7$

الأعداد العقدية

I- تمهيد :

1- حل في \mathbb{N} المعادلة : $x + 3 = 0$

لدينا : $x = -3 \notin \mathbb{N}$

إن : $S = \emptyset$

وفي \mathbb{Z} حل هذه المعادلة هو : $S = \{-3\}$

2- حل في \mathbb{Z} المعادلة : $2x - 1 = 0$

لدينا : $x = \frac{1}{2} \notin \mathbb{Z}$

إن : $S = \emptyset$

وفي \mathbb{Q} الحل هو : $S = \left\{\frac{1}{2}\right\}$

3- حل في \mathbb{Q} المعادلة : $x^2 - 2 = 0$

لدينا : $x = -\sqrt{2}$ أو $x = \sqrt{2}$

إن : $S = \emptyset$

وفي \mathbb{R} الحل هو : $S = \{-\sqrt{2}, \sqrt{2}\}$

4- حل في \mathbb{R} المعادلة : $x^2 + 1 = 0$

لدينا : $x^2 = -1$

إن : $S = \emptyset$

في البداية كتب حل المعادلة : $x^2 + 1 = 0$

على شكل : $S = \{-\sqrt{-1}, \sqrt{-1}\}$

ولتفادي هذه التناقضات وضع الرياضي Euler الرمز i .

للتعبير عن العدد غير الحقيقي الذي يحقق : $i^2 = -1$

فأصبح في \mathbb{C} الحل هو : $S = \{-i, i\}$

وبعده جاء العالمان الرياضيان Gauss و Cauchy لوضع

5- حل في \mathbb{R} المعادلة $x^3 = 15x + 4$ في البداية وضع الرياضي بومبلي العدد الغير

عادي $4 = \sqrt[3]{2 - \sqrt{-121}} + \sqrt[3]{2 + \sqrt{-121}}$ وبذلك بين أن 4 حل لهذه المعادلة بين ذلك ؟

II- عوميات :

1- تعريف :

توجد مجموعة \mathbb{C} تتضمن \mathbb{R} وتحقق ما يلي :

1- المجموعة \mathbb{C} تحتوي على عنصر غير حقيقي i ويحقق $i^2 = -1$.

2- كل عنصر من \mathbb{C} يكتب على شكل وحيد : $a + ib$ حيث $a \in \mathbb{R}$ و $b \in \mathbb{R}$.

3- المجموعة \mathbb{C} مزودة بعمليتي الجمع والضرب تمددان نفس العمليتين في \mathbb{R} ولهما نفس الخصائص.

2- تعاريف ومصطلحات :

1- مجموعة الأعداد العقدية هي المجموعة \mathbb{C} .
حيث : $\mathbb{C} = \{a+ib / a \in \mathbb{R} ; b \in \mathbb{R}\}$

2- الشكل الجبري لعدد عقدي :

ليكن z عددا عقديا.
الكتابة $z = a+ib$ حيث $a \in \mathbb{R} ; b \in \mathbb{R}$ تسمى **الشكل الجبري للعدد العقدي z** .

3- الجزء الحقيقي – الجزء التخيلي :

ليكن z عددا عقديا حيث $z = a+ib$ ، $a \in \mathbb{R}$ ، $b \in \mathbb{R}$
العدد a يسمى **الجزء الحقيقي** للعدد العقدي z .
ونكتب رمزه كالتالي : $a = \Re(z)$

والعدد b يسمى **الجزء التخيلي** للعدد العقدي z .
ونرمز له بـ : $b = \Im(z)$

استنتاج

$$\forall z \in \mathbb{C} ; z = \Re(z) + i \Im(z)$$

4- تساوي عددين عقديين :

نعتبر العددين z_1 و z_2 .
حيث : $(a,b) \in \mathbb{R}^2$ و $z_1 = a+ib$
و $(c,d) \in \mathbb{R}^2$ و $z_2 = c+id$
 $z_1 = z_2 \Leftrightarrow a = c \text{ و } b = d$

استنتاج

$$z_1 = z_2 \Leftrightarrow \begin{cases} \Re(z_1) = \Re(z_2) \\ \Im(z_1) = \Im(z_2) \end{cases}$$

5- العمليات في \mathbb{C} :

a- الجمع :

عملية الجمع في \mathbb{C} عملية :
• تبادلية : $\forall (z_1, z_2) \in \mathbb{C}_+^2 \quad z_1 + z_2 = z_2 + z_1$
• تجميعية .
• لكل عنصر مقابل.
• العنصر المحايد هو 0 .

b- الضرب :

عملية الضرب في \mathbb{C} عملية :
• تبادلية :
• تجميعية .
• لكل عنصر مقابل.
• العنصر المحايد هو 1 .

c- مقلوب عدد عقدي غير منعدم :

$$\begin{cases} z \neq 0 & ; \quad z = a + ib \\ (a, b) \in \mathbb{R}^2 \end{cases} \quad \text{ليكن :}$$

$$\frac{1}{z} = \frac{1}{a - ib} \quad \text{لدينا :}$$

$$= \frac{a + ib}{(a - ib)(a + ib)}$$

$$= \frac{a - ib}{a^2 - (ib)^2}$$

$$= \frac{a - ib}{a^2 + b^2}$$

$$= \frac{a}{a^2 + b^2} + i \frac{-b}{a^2 + b^2}$$

مثال :

أكتب على الشكل الجبري الأعداد العقدية التالية :

$$\frac{1+2i}{3+i} \quad -1$$

$$\frac{1+2i}{3+i} = \frac{(1+2i)(3-i)}{(3+i)(3-i)}$$

$$= \frac{3 + 6i - i - 2i^2}{9 - i^2}$$

$$= \frac{5 + 5i}{10}$$

$$= \frac{1}{2} + \frac{1}{2}i$$

$$\frac{2-i}{1+2i} \quad -2$$

ط 1 :

$$\frac{2-i}{1+2i} = \frac{(2-i)(1-2i)}{1+4} = \frac{2-2-4i-i}{5} = -i$$

ط 2 :

$$\frac{2-i}{1+2i} = \frac{2-i}{-i^2+2i} = \frac{2-i}{i(2-i)} = \frac{1}{i} = \frac{i}{-1} = -i$$

3- التمثيل الهندسي لعدد عقدي :

1- صورة عدد عقدي لحق نقطة Affixe d'un point

المستوى منسوب إلى معلم متعامد ممنظم $(O, \vec{e}_1, \vec{e}_2)$.

نعتبر التطبيق :

$$f : \mathbb{C} \rightarrow P$$

$$z = a + ib \rightarrow M(a, b)$$

التطبيق f **تقابل** من \mathbb{C} نحو P .

تعريف :

النقطة $M(a, b)$ تسمى **صورة العدد العقدي** $z = a + ib$.

والعدد العقدي $z = a + ib$ حيث $(a, b) \in \mathbb{R}^2$ يسمى **لحق النقطة** $M(a, b)$.

$$\text{aff}(M) = z \quad \text{ويكتب}$$

2- لحق متجهة :

نعتبر تطبيق g المعروف من \mathbb{C} نحو المستوى المتجهي V_2 .

$$g : \mathbb{C} \rightarrow V_2$$

$$z = a + ib \rightarrow \vec{u}(a, b)$$

لدينا : g تقابل من \mathbb{C} نحو V_2 .

-a تعريف :

المتجهة $\vec{u}(a, b)$ تسمى **صورة العدد العقدي** $z = a + ib$ ،

والعدد العقدي $z = a + ib$ حيث $(a, b) \in \mathbb{R}^2$ يسمى **لحق المتجهة** \vec{u} .

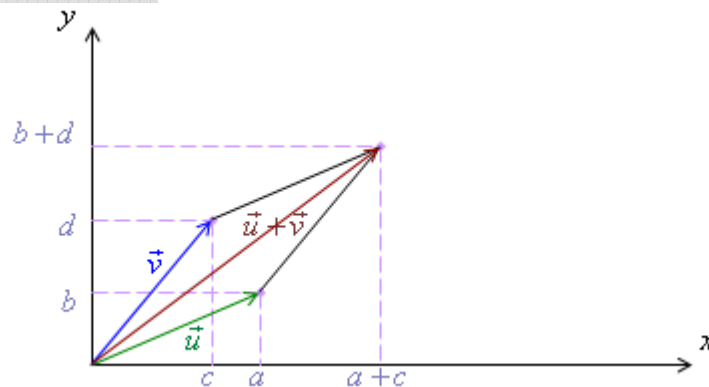
$$\text{aff}(\vec{u}) = z \quad \text{ونكتب :}$$

-b لحق مجموع متجهتين :

نعتبر المتجهتين $\vec{u}(a, b)$ ، $\vec{v}(c, d)$.

$$\text{aff}(\vec{u}) = a + ib \quad \text{لدينا :}$$

$$\text{aff}(\vec{v}) = c + id \quad \text{و :}$$



$$\text{aff}(\vec{u} + \vec{v}) = (a + c) + (b + d) \quad \text{لدينا :}$$

$$= (a + ib) + (c + id)$$

$$= \text{aff}(\vec{u}) + \text{aff}(\vec{v})$$

وبالتالي :

$$\text{aff}(\vec{u} + \vec{v}) = \text{aff}(\vec{u}) + \text{aff}(\vec{v})$$

c- لحق جداء المتجهة في عدد حقيقي :

نعتبر المتجهة $\vec{u}(a, b)$ و $\lambda \in \mathbb{R}$.

لدينا : إحدائتي $\lambda \vec{u}$ هما $(\lambda a, \lambda b)$.

إذن : $\text{aff}(\lambda \vec{u}) = \lambda a + i \lambda b$

$$= \lambda (a + ib)$$

$$= \lambda \text{aff}(\vec{u})$$

وبالتالي :

$$\text{aff}(\lambda \vec{u}) = \lambda \text{aff}(\vec{u})$$

d- لحق المتجهة \overrightarrow{AB} :

نتكن : $\text{aff}(A) = x_A + i y_A$

و : $\text{aff}(B) = x_B + i y_B$

لدينا : $\text{aff}(\overrightarrow{AB}) = \text{aff}(-\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB})$

$$= \text{aff}(-\overrightarrow{OA}) + \text{aff}(\overrightarrow{OB})$$

$$= -\text{aff}(\overrightarrow{OA}) + \text{aff}(\overrightarrow{OB})$$

$$= -x_A + i y_A + x_B + i y_B$$

$$= (x_B - x_A) + i (y_B - y_A)$$

وبالتالي : $\text{aff}(\overrightarrow{AB}) = \text{aff}(B) - \text{aff}(A)$

e- لحق منتصف قطعة :

نتكن A و B نقطتان لحقاهما z_A و z_B على التوالي .

و I منتصف القطعة $[AB]$ لحقها z_I .

لدينا : $\overrightarrow{AI} = \overrightarrow{IB}$

إذن : $\text{aff}(\overrightarrow{AI}) = \text{aff}(\overrightarrow{IB})$

إذن : $z_I - z_A = z_B - z_I$

$$2 z_I = z_A + z_B$$

ومنه :

$$z_I = \frac{z_A + z_B}{2}$$

خاصية :

$$\cdot z_I = \frac{z_A + z_B}{2} \text{ هو } [AB] \text{ لـق منتصف قطعة}$$

استقامية ثلاث نقط

لتكن A و B و C ثلاث نقط من المستوى العقدي ألقها على التوالي : z_A و z_B و z_C .
لدينا : A و B و C ثلاث نقط مستقيمة.

$$\Leftrightarrow (\exists \alpha \in \mathbb{R}) / \overrightarrow{AC} = \alpha \overrightarrow{AB}$$

$$\Leftrightarrow (\exists \alpha \in \mathbb{R}) / \text{aff}(\overrightarrow{AC}) = \alpha \text{aff}(\overrightarrow{AB})$$

$$\Leftrightarrow (\exists \alpha \in \mathbb{R}) / \frac{z_C - z_A}{z_B - z_A} = \alpha$$

$$\Leftrightarrow \frac{z_C - z_A}{z_B - z_A} \in \mathbb{R}$$

خلاصة وخاصية :

لتكن A و B و C ثلاث نقط ألقها z_A و z_B و z_C على التوالي حيث $z_A \neq z_B$.
تكون النقط A ، B ، C مستقيمة إذا وفق إذا كان العدد $\frac{z_C - z_A}{z_B - z_A}$ حقيقياً.

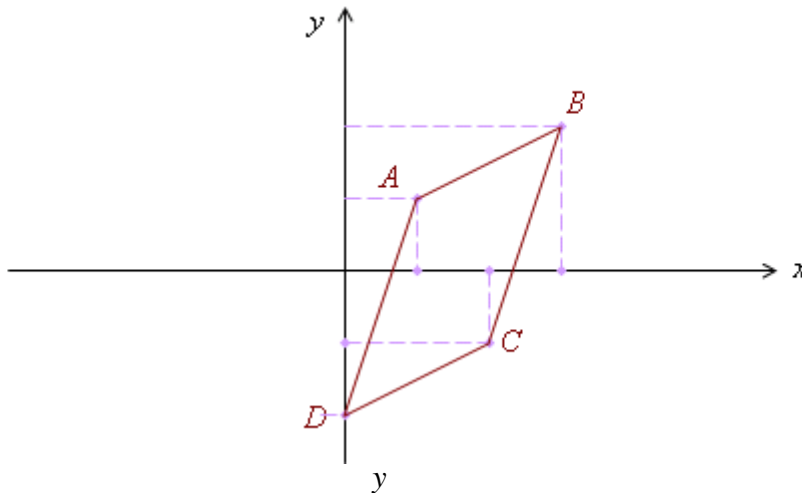
تطبيقات :

1- أنشئ النقط A ، B ، C و D التي ألقها على التوالي : $z_A = 1 + i$ ، $z_B = 3 + 2i$ ،

$$z_C = 2 - i ،$$

$$\cdot z_D = -2i$$

تحقق أن الرباعي $ABCD$ متوازي الأضلاع.



$$\begin{aligned} \text{لدينا : } \text{aff}(\overrightarrow{DC}) &= z_C - z_D \\ &= 2 - i + 2i \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{و : } \text{aff}(\overrightarrow{AB}) &= z_B - z_A \\ &= 3 + 2i - 1 - i \end{aligned}$$

$$\text{إن : } \text{aff}(\overrightarrow{AB}) = \text{aff}(\overrightarrow{DC})$$

$$\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{DC}$$

إذن :

وبالتالي الرباعي $ABCD$ متوازي الأضلاع .

2- لتكن A و B و C ثلاث نقط ألقاها على التوالي هي : 1 ، z و $iz+1$.
حدد E مجموعة النقط $B(z)$ من المستوى بحيث تكون النقط A ، B و C مستقيمة .

الجواب :

① الحالة $A = B$

$$A = B \Leftrightarrow z = 1$$

$$A \in E$$

إذن :

② الحالة $A = C$

$$iz + 1 = 1$$

لدينا :

$$iz = 0$$

$$z = 0$$

إذن :

$$O \in E$$

إذن :

③ الحالة $B = C$

$$z = iz + 1$$

لدينا :

$$(1-i)z = 1$$

إذن :

$$z = \frac{1}{1-i}$$

إذن :

$$z = \frac{1+i}{2}$$

إذن :

$$B\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right) \in E$$

ومنه :

④ الحالة

النقط A ، B و C مختلفة مثنى مثنى .

لدينا : A ، B و C مستقيمة .

$$\Leftrightarrow \frac{z_B - z_A}{z_C - z_A} \in \mathbb{R}$$

$$\Leftrightarrow \frac{z - 1}{iz} \in \mathbb{R}$$

$$\Leftrightarrow \frac{iz - i}{-z} \in \mathbb{R}$$

$$\Leftrightarrow \frac{i - iz}{z} \in \mathbb{R}$$

نضع : $z = x + iy$

$$\Leftrightarrow \frac{i - i(x + iy)}{x + iy} \in \mathbb{R}$$

$$\Leftrightarrow \frac{y + i(1-x)}{x + iy} \in \mathbb{R}$$

$$\Leftrightarrow \frac{(y + i(1-x))(x - iy)}{x^2 + y^2} \in \mathbb{R}$$

$$\Leftrightarrow \frac{(xy + (1-x)y) + i(x - x^2 - y^2)}{x^2 + y^2} \in \mathbb{R}$$

$$x - x^2 - y^2 = 0 \quad \text{إذن :}$$

$$x^2 - 2\frac{1}{2}x + y^2 = 0$$

$$x^2 - 2\frac{1}{2}x + \frac{1}{4} - \frac{1}{4} + y^2 = 0$$

$$\left(x - \frac{1}{2}\right)^2 + y^2 = \frac{1}{4}$$

$$E = \ell \left(\Omega \left(\frac{1}{2}, 0 \right) ; \frac{1}{2} \right) \quad \text{إذن :}$$

النقط المتداورة

خاصية

في المستوى العقدي نعتبر النقط D, C, B, A التي ألقاها على التوالي هي d, c, b, a
تكون النقط D, C, B, A متداورة إذا وفقط إذا كان $\frac{d-a}{b-a} \times \frac{d-c}{b-c} \in \mathbb{R}$ أو $\frac{d-a}{b-a} \times \frac{d-c}{b-c} \in \mathbb{R}$

ملاحظة و تدكير

إذا كانت ℓ هي الدائرة المحيطة بالمثلث ABC ونقطة من المستوى العقدي فان

$$M \in \ell \Leftrightarrow (\widehat{AB, AD}) = (\widehat{CB, CD}) \quad \text{أو} \quad (\widehat{AB, AD}) + (\widehat{CB, CD}) = \pi$$

مثال

أثبت أن النقط D, C, B, A التي ألقاها على التوالي $a = -2$ و $b = 2$ و $c = -1+i$ و $d = 1-3i$ متداورة

-III مرافق عدد عقدي :

1- تعريف :

$$\begin{aligned} & \text{مرافق العدد العقدي} \quad z = a + ib \\ & \text{حيث} \quad (a, b) \in \mathbb{R}^2 \\ & M \in \ell \Leftrightarrow \widehat{BAD} + \widehat{BCD} = \pi \\ & \text{هو العدد العقدي الذي يرمز له بـ } \bar{z} \text{ والمعرف بـ } \bar{z} = a - ib \\ & \text{أي :} \quad a + ib = a - ib \end{aligned}$$

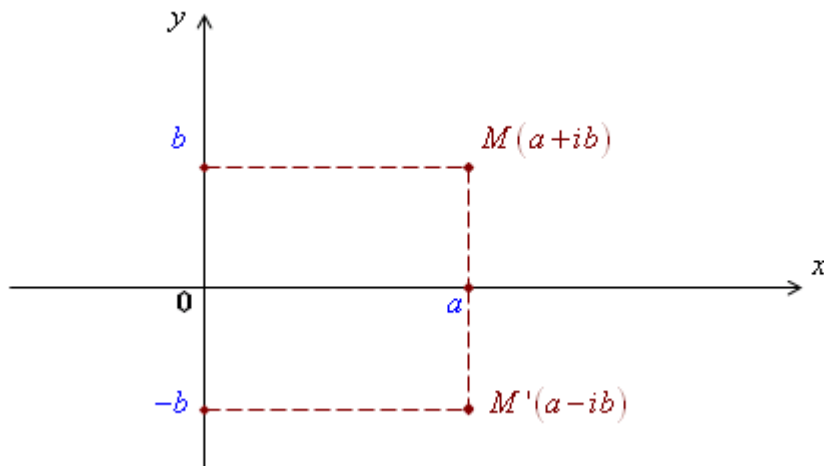
ملاحظات :

$$(1) \quad \text{لكل } z \text{ من } \mathbb{C} \quad ; \quad \bar{\bar{z}} = z$$

$$(2) \quad \text{إذا كانت } z = a + ib$$

$$\text{فان :} \quad z \bar{z} = a^2 + b^2$$

$$(3) \quad \text{النقطتان } M(z) \text{ و } M'(\bar{z}) \text{ متماثلتان بالنسبة لمحور الأفاصيل.}$$



خاصيات :

1- إذا كانت $z = a + ib$ حيث $(a, b) \in \mathbb{R}^2$

فإن :

$$z + \bar{z} = 2a$$

$$z - \bar{z} = 2ib$$

استنتاج :

$$\forall z \in \mathbb{C}$$

$$z + \bar{z} = 2 \operatorname{Re}(z)$$

$$z - \bar{z} = 2i \operatorname{Im}(z)$$

2- ليكن z عددا عقديا.

$$z = \bar{z} \Leftrightarrow z \in \mathbb{R}$$

$$z + \bar{z} = 0 \Leftrightarrow z \text{ تخيلي صرف}$$

3- ليكن z_1 و z_2 عددان عقديان.

$$\overline{z_1 + z_2} = \bar{z}_1 + \bar{z}_2$$

$$\overline{z_1 \times z_2} = \bar{z}_1 \times \bar{z}_2$$

$$\overline{\left(\frac{z_1}{z_2} \right)} = \frac{\bar{z}_1}{\bar{z}_2} \quad / \quad z_2 \neq 0$$

• لكل z من \mathbb{C} ولكل α من \mathbb{R} .

$$\overline{\alpha z} = \alpha \bar{z}$$

4- لكل z من \mathbb{C} ولكل n من \mathbb{N} .

$$\overline{z^n} = (\bar{z})^n$$

$$\forall z_1, z_2, \dots, z_n \in \mathbb{C}$$

5-

$$\overline{z_1 \cdot z_2 \cdot \dots \cdot z_n} = \bar{z}_1 \cdot \bar{z}_2 \cdot \dots \cdot \bar{z}_n$$

$$\overline{\prod_{k=1}^n z_k} = \prod_{k=1}^n \bar{z}_k$$

تطبيق :

1- حل في \mathbb{C} المعادلة : $(E_1) : \frac{z + 2i}{i\bar{z} - 1} = 3i$

$$D = \{z \in \mathbb{C} / i \bar{z} - 1 \neq 0\}$$

$$i \bar{z} - 1 \neq 0 \Leftrightarrow \bar{z} \neq \frac{1}{i}$$

$$\Leftrightarrow \bar{z} \neq -i$$

$$\Leftrightarrow z \neq i$$

$$D = \{z \in \mathbb{C} / z \neq i\} \quad \text{إذن :}$$

$$\forall z \in \mathbb{C} \quad \text{لدينا :}$$

$$(E_1) \Leftrightarrow z + 2i = (i \bar{z} - 1) 3i$$

$$\Leftrightarrow z + 2i = -3\bar{z} - 3i$$

$$\Leftrightarrow z + 3\bar{z} - 5i = 0$$

$$z = x + iy \quad \text{نضع :}$$

$$(E_1) \Leftrightarrow (x + iy) + 3(x - iy) + 5i = 0 \quad \text{إذن :}$$

$$\Leftrightarrow (x + 3x) + i(y - 3y + 5) = 0$$

$$\Leftrightarrow 4x + i(5 - 2y) = 0$$

$$\Leftrightarrow 4x = 5 - 2y = 0$$

$$\Leftrightarrow x = 0 \quad \text{و} \quad y = \frac{5}{2}$$

$$z = \frac{5}{2}i \quad \text{ومنه :}$$

$$S = \left\{ \frac{5}{2}i \right\} \quad \text{وعليه :}$$

$$(E_2) : z^2 + 4\bar{z} - 5 = 0 \quad \text{-2 حل في } \mathbb{C} \text{ المعادلة :}$$

$$z = x + iy \quad \text{نضع :}$$

$$(E_2) \Leftrightarrow (x + iy)^2 + 4(x - iy) - 5 = 0 \quad \text{لدينا :}$$

$$\Leftrightarrow x^2 + 2ixy - y^2 + 4x - 4iy - 5 = 0$$

$$\Leftrightarrow (x^2 - y^2 + 4x - 5) + i(2xy - 4y) = 0$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x^2 - y^2 + 4x - 5 = 0 \\ 2y(x - 2) = 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x^2 - y^2 + 4x - 5 = 0 \\ y = 0 \text{ أو } x = 2 \end{cases}$$

$$\bullet \quad \text{إذا كانت : } y = 0$$

$$x^2 + 4x - 5 = 0 \quad \text{فإن :}$$

$$\Delta = 6^2 \Rightarrow x_1 = -5 \text{ و } x_2 = 1 \quad \text{إذن :}$$

$$S_1 = \{-5 ; 1\} \quad \text{ومنه :}$$

• إذا كانت : $x = 2$

$$4 - y^2 + 4 \times 2 - 5 = 0 \quad \text{فإن :}$$

$$\Leftrightarrow 4 - y^2 + 8 - 5 = 0$$

$$\Leftrightarrow -y^2 = -7$$

$$\Leftrightarrow y^2 = 7$$

$$y = \sqrt{7} \quad \text{أو} \quad y = -\sqrt{7}$$

$$S_2 = \{2 - i\sqrt{7} ; 2 + i\sqrt{7}\} \quad \text{ومنه :}$$

$$S = \{-5 ; 1 ; 2 - i\sqrt{7} ; 2 + i\sqrt{7}\} \quad \text{وبالتالي :}$$

Module d'un nombre complexe

-IV معيار عدد عقدي

ليكن z عددا عقديا حيث :

$$z = a + ib \quad / \quad (a, b) \in \mathbb{R}^2$$

$$\bar{z} = a - ib \quad \text{لدينا :}$$

$$z \cdot \bar{z} = a^2 + b^2 \geq 0 \quad \text{إذن :}$$

$$\forall z \in \mathbb{C} ; \quad z \bar{z} \geq 0 \quad \text{إذن :}$$

1- تعريف :

العدد الحقيقي $\sqrt{z \bar{z}}$ يسمى معيار العدد العقدي z .
ونرمز له بـ $|z|$.

$$z = a + ib \quad / \quad (a, b) \in \mathbb{R}^2$$

$$|z| = \sqrt{z \bar{z}} = \sqrt{a^2 + b^2}$$

أمثال :

$$|2 - i| = \sqrt{4 + 1} = \sqrt{5}$$

$$|3 + 2i| = \sqrt{9 + 4} = \sqrt{13}$$

$$|2 - 3i| = \sqrt{4 + 9} = \sqrt{13}$$

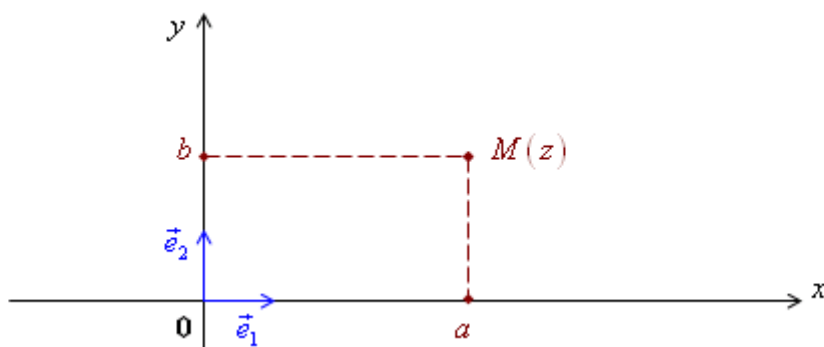
ملاحظة :

$$\forall z \in \mathbb{C} ; \quad |z| = |-z| = |\bar{z}|$$

2- التمثيل الهندسي لمعيار عدد عقدي :

المستوى العقدي منسوب إلى معلم متعامد ممنظم $(O, \vec{e}_1, \vec{e}_2)$.

لتكن $M(a, b)$ صورة العدد العقدي $z = a + ib$.



$$|z| = \sqrt{a^2 + b^2} \quad \text{لدينا :}$$

$$OM = \sqrt{a^2 + b^2} \quad \text{ولدينا :}$$

$$|z| = OM \quad \text{إذن :}$$

خاصية :

ليكن z عددا عقديا صورته M وصورته المتجهية \vec{u} .

$$|z| = OM = \|\vec{u}\| \quad \text{لدينا :}$$

3- مسافة نقطتين في المستوى العقدي :

لتكن A و B نقطتان لحقاهما z_A و z_B على التوالي .

$$\text{aff}(\overrightarrow{AB}) = z_B - z_A \quad \text{لدينا :}$$

$$AB = \|\overrightarrow{AB}\| = |z_B - z_A| \quad \text{إذن :}$$

خاصية :

لتكن A و B نقطتان لحقاهما z_A و z_B .

$$AB = \|\overrightarrow{AB}\| = |z_B - z_A|$$

تطبيقات :

$z_B = -3 + 2i$ و $z_A = 1 + i$: A و B نقطتان حيث :

أحسب المسافة : AB

$$AB = |z_B - z_A| \quad \text{لدينا :}$$

$$= |-3 + 2i - 1 - i|$$

$$= |-4 + i| = \sqrt{16 + 1} = \sqrt{17}$$

4- خاصيات :

-1 $\forall z \in \mathbb{C} ; z = 0 \Leftrightarrow z = 0$
-2 لكل z من \mathbb{C} : $\operatorname{Re}(z) \leq z $ $\operatorname{Im}(z) \leq z $
-3 لكل z_1 و z_2 من \mathbb{C} : $ z_1 + z_2 \leq z_1 + z_2 $
-4 لكل z_1 و z_2 من \mathbb{C} : $ z_1 \cdot z_2 = z_1 \cdot z_2 $
-5 لكل z من \mathbb{C} ولكل n من \mathbb{N}^* : $ z^n = z ^n$
-6 لكل z_1 من \mathbb{C} ولكل z_2 من \mathbb{C}^* : $\left \frac{z_1}{z_2} \right = \frac{ z_1 }{ z_2 }$
-7 لكل z من \mathbb{C}^* : $\left \frac{1}{z} \right = \frac{1}{ z }$

تطبيق :

حدد مجموعة النقط $M(z)$ التي لحقها z يحقق ما يلي :

$$|z| = |z - i| \quad \text{-1}$$

$$|z| = 2 |z - i| \quad \text{-2}$$

الجواب :

ط-1 : 1- لتكن A النقطة ذات اللحق i .

$$|z| = |z - i| \Leftrightarrow OM = AM$$

إذن : مجموعة النقط M هي واسط القطعة $[OA]$.

ط-2 : نضع : $z = x + iy$

$$|z| = |z - i| \Leftrightarrow |x + iy|^2 = |x + i(y-1)|^2$$

$$\Leftrightarrow x^2 + y^2 = x^2 + (y-1)^2$$

$$\Leftrightarrow y^2 = y^2 - 2y + 1$$

$$\Leftrightarrow 2y = 1$$

$$\Leftrightarrow y = \frac{1}{2}$$

$$|z| = 2 |z - i| \quad \text{2- لدينا :}$$

$$z = x + iy \quad \text{نضع :}$$

$$\sqrt{x^2 + y^2} = 2 \sqrt{x^2 + (y-1)^2} \quad \text{إذن :}$$

$$x^2 + y^2 = 4(x^2 + (y-1)^2)$$

$$4x^2 + 4y^2 - 8y + 4 - x^2 - y^2 = 0 \quad \text{إذن :}$$

$$3x^2 + 3y^2 - 8y + 4 = 0$$

$$x^2 + y^2 - \frac{8}{3}y + \frac{4}{3} = 0$$

$$x^2 + y^2 - 2 \cdot \frac{4}{3}y + \frac{16}{9} - \frac{16}{9} + \frac{4}{3} = 0$$

$$x^2 + \left(y - \frac{4}{3}\right)^2 = \frac{4}{9}$$

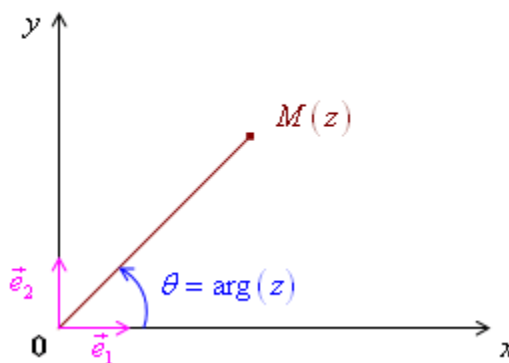
وبالتالي مجموعة النقط M هي الدائرة التي مركزها $\Omega \left(0, \frac{4}{3}\right)$ وشعاعها $r = \frac{2}{3}$.

-V عمدة عدد عقدي غير منعدم.

L'argument d'un nombre complexe non nul.

المستوى العقدي منسوب إلى معلم متعامد ممنظم $(O, \vec{e}_1, \vec{e}_2)$.

لتكن M نقطة لحقها z .



1- تعريف :

لتكن M صورة العدد العقدي غير المنعدم z .

عمدة العدد العقدي z هو كل قياس الزاوية الموجهة $(\vec{e}_1, \overrightarrow{OM})$ ، ونرمز له بـ $\arg(z)$.

ملاحظة :

1- إذا كان θ هو عمدة العقدي z ، فإن كل عدد يكتب على شكل $\theta + 2k\pi$ / $k \in \mathbb{Z}$ هو أيضا عمدة العدد العقدي z .

$$\arg(z) = \theta + 2k\pi \quad / \quad k \in \mathbb{Z} \quad \text{ونكتب :}$$

$$\arg(z) = \theta [2\pi] \quad \text{أو :}$$

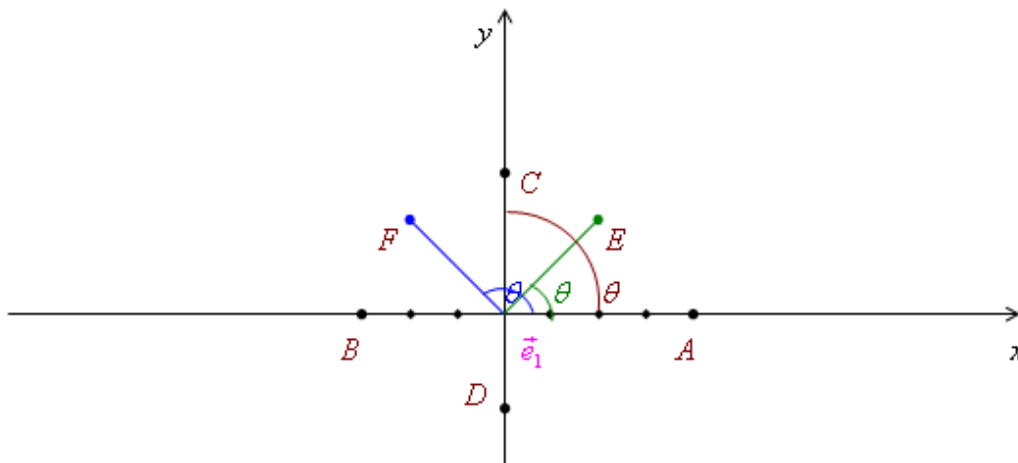
2- العدد 0 لا عمدة له.

أمثلة :

أنشئ النقاط التي ألقاها :

$$z_E = 2 + 2i \quad , \quad z_D = -2i \quad , \quad z_C = 3i \quad , \quad z_B = -3 \quad , \quad z_A = 4$$

$$z_F = -2 + 2i \quad \text{و}$$



استنتاج :

$$\text{Arg}(z_A) = 0 [2\pi] \quad -$$

$$\text{Arg}(z_B) = \pi [2\pi] \quad -$$

$$\text{Arg}(z_C) = \frac{\pi}{2} [2\pi] \quad -$$

$$\text{Arg}(z_D) = \frac{-\pi}{2} [2\pi] \quad -$$

$$\text{Arg}(z_E) = \frac{\pi}{4} [2\pi] \quad -$$

$$\text{Arg}(z_F) = \frac{3\pi}{4} [2\pi] \quad -$$

2- الشكل المثلثي لعدد عقدي غير منعدم.

تمهيد :

لدينا :

$$z_E = 2 + 2i$$

$$= \sqrt{8} \times \left(\frac{\sqrt{2}}{2} + i \frac{\sqrt{2}}{2} \right)$$

$$= 2\sqrt{2} \left(\cos \frac{\pi}{4} + i \sin \frac{\pi}{4} \right)$$

هذه الكتابة تسمى **الشكل المثلثي** للعدد العقدي $z_E = 2 + 2i$.

تعريف وخاصية :

كل عدد عقدي غير منعدم z يكتب بكيفية وحيدة على الشكل $z = |z| (\cos \theta + i \sin \theta)$

حيث : $\theta = \arg(z) [2\pi]$

وتسمى هذه الكتابة بالشكل المثلثي للعدد العقدي z .

ونكتب كذلك : $z = [r, \theta]$

حيث : $r = |z|$ و $\theta \equiv \arg(z) [2\pi]$

مثال :

$$z = \left[3, \frac{-\pi}{6} \right] = 3 \left(\cos \left(\frac{-\pi}{6} \right) + i \sin \left(\frac{-\pi}{6} \right) \right)$$

$$= 3 \left(\cos \frac{\pi}{6} - i \sin \frac{\pi}{6} \right)$$

$$\bar{z} = 3 \left(\cos \frac{\pi}{6} + i \sin \frac{\pi}{6} \right)$$

$$= \left[3, \frac{\pi}{6} \right]$$

لدينا :

ليكن z عددا عقديا معياره يساوي 1 .

حيث : $z = [1, \theta] = \cos \theta + i \sin \theta$

$$\bar{z} = \cos \theta - i \sin \theta$$

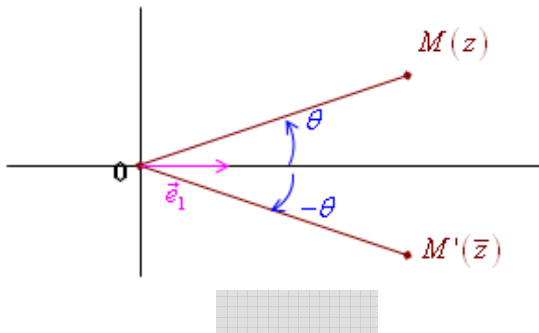
$$= \cos(-\theta) + i \sin(-\theta)$$

$$= [1, -\theta]$$

استنتاج :

لكل z من \mathbb{C}^* .

$$\arg \bar{z} = -\arg(z) [2\pi]$$

3- تحديد الشكل المثلثي لعدد عقدي غير منعدم :

ليكن $(a, b) \in \mathbb{R}^2 \leftrightarrow z = a + i b$

لدينا : $|z| = \sqrt{a^2 + b^2}$

$$z = \sqrt{a^2 + b^2} \left(\frac{a}{\sqrt{a^2 + b^2}} + i \frac{b}{\sqrt{a^2 + b^2}} \right) \quad \text{إذن :}$$

ليكن θ من $]-\pi, \pi]$.

$$\cos \theta = \frac{a}{\sqrt{a^2 + b^2}} \quad \text{حيث :}$$

$$\sin \theta = \frac{b}{\sqrt{a^2 + b^2}}$$

$$z = r (\cos \theta + i \sin \theta)$$

$$r = |z| \quad \text{حيث :}$$

$$\theta \equiv \arg z [2 \pi]$$

تطبيق :

أكتب على الشكل المثلثي الأعداد التالية :

$$z_1 = 1 + i\sqrt{3} \quad -1$$

$$|z| = \sqrt{1 + 3} = 2$$

لدينا :

$$z = 2 \times \left(\frac{1}{2} + i \frac{\sqrt{3}}{2} \right)$$

إذن :

$$= 2 \left(\cos \frac{\pi}{3} + i \sin \frac{\pi}{3} \right)$$

$$z_1 = \left[2, \frac{\pi}{3} \right]$$

$$z_2 = \sqrt{3} - i \quad -2$$

$$z_2 = 2 \left(\frac{\sqrt{3}}{2} - i \frac{1}{2} \right)$$

$$= 2 \left(\cos \left(\frac{-\pi}{6} \right) + i \sin \left(\frac{-\pi}{6} \right) \right)$$

$$= \left[2 ; \frac{-\pi}{6} \right]$$

$$z_3 = 2 + 2i \quad -3$$

$$|z_3| = \sqrt{8} = 2\sqrt{2}$$

لدينا :

$$z_3 = 2\sqrt{2} \left(\frac{\sqrt{2}}{2} + i \frac{\sqrt{2}}{2} \right)$$

إذن :

$$= 2\sqrt{2} \left(\cos \frac{\pi}{4} + i \sin \frac{\pi}{4} \right)$$

$$= \left[2\sqrt{2} ; \frac{\pi}{4} \right]$$

$$z_4 = -\sqrt{3} - i \quad -4$$

$$= 2 \left(\frac{-\sqrt{3}}{2} - \frac{1}{2} i \right)$$

$$= 2 \left(\cos\left(\frac{-5\pi}{6}\right) + i \sin\left(\frac{-5\pi}{6}\right) \right) = \left[2, \frac{-5\pi}{6} \right]$$

خاصيات :

$$\forall z \in \mathbb{C}^* , \quad \arg \frac{1}{z} \equiv -\arg z \quad [2 \pi] \quad \text{-1}$$

نضع : $z = [1, \theta]$

$$\begin{aligned} \frac{1}{z} &= \frac{1}{\cos \theta + i \sin \theta} \\ &= \frac{\cos \theta - i \sin \theta}{1} \\ &= \cos(-\theta) + i \sin(-\theta) \\ &= [1, -\theta] \end{aligned}$$

$$\forall z \in \mathbb{C}^* , \quad \arg \frac{1}{z} \equiv -\arg z \quad [2 \pi] \quad \text{إذن :}$$

-2- لكل z_1 و z_2 من \mathbb{C}^* :

$$\arg z_1 \cdot z_2 \equiv \arg z_1 + \arg z_2 \quad [2 \pi]$$

برهان :

$$z_1 = [1, \theta] \quad \text{نضع :}$$

$$z_2 = [1, \alpha]$$

$$z_1 \cdot z_2 = (\cos \theta + i \sin \theta) (\cos \alpha + i \sin \alpha) \quad \text{لدينا :}$$

$$= (\cos \theta \cos \alpha - \sin \theta \sin \alpha) + i (\cos \theta \sin \alpha + \sin \theta \cos \alpha)$$

$$= \cos(\theta + \alpha) + i \sin(\theta + \alpha)$$

$$= [1, \theta + \alpha]$$

$$\arg z_1 \cdot z_2 \equiv \arg z_1 + \arg z_2 \quad [2 \pi] \quad \text{إذن :}$$

3- لكل z_1 و z_2 من \mathbb{C}^* :

$$\arg \frac{z_1}{z_2} \equiv \arg z_1 - \arg z_2 \quad [2 \pi]$$

برهان :

$$\arg \frac{z_1}{z_2} = \arg \left(z_1 \times \frac{1}{z_2} \right) \quad \text{لدينا :}$$

$$= \arg z_1 + \arg \frac{1}{z_2} \quad [2 \pi]$$

$$\arg \frac{z_1}{z_2} \equiv \arg z_1 - \arg z_2 \quad [2\pi] \quad \text{إذن :}$$

4- لكل n من \mathbb{N} ولكل z من \mathbb{C}^*

$$\arg z^n = n \arg(z) \quad [2\pi]$$

برهان :

البرهان بالترجع .

خلاصة :

$$\begin{aligned} \frac{1}{[R, \theta]} &= \left[\frac{1}{R}, -\theta \right] \\ [R, \theta] \cdot [r, \alpha] &= [R \times r; \theta + \alpha] \\ \frac{[R, \theta]}{[r, \alpha]} &= \left[\frac{R}{r}; \theta - \alpha \right] \\ [R, \theta]^n &= [R^n; n \alpha] \end{aligned}$$

تطبيق :

$$Z = \frac{1+i}{1+i\sqrt{3}}$$

أكتب على الشكل المثلثي وعلى الشكل الجبري العدد :

$$\sin \frac{\pi}{12} \quad \text{و} \quad \cos \frac{\pi}{12}$$

ثم استنتج قيمتي

الجواب :

$$Z = \frac{1+i}{1+i\sqrt{3}} = \frac{\left[\sqrt{2}, \frac{\pi}{4} \right]}{\left[2, \frac{\pi}{3} \right]} = \left[\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{-\pi}{12} \right]$$

لدينا :

$$Z = \frac{1+i}{1+i\sqrt{3}} = \frac{(1+i)(1-i\sqrt{3})}{4}$$

$$= \frac{1 + \sqrt{3} + i - i\sqrt{3}}{4}$$

$$= \frac{1 + \sqrt{3}}{4} + i \frac{1 - \sqrt{3}}{4}$$

$$\frac{\sqrt{2}}{2} \left(\cos \frac{-\pi}{12} + i \sin \frac{-\pi}{12} \right) = \frac{1 + \sqrt{3}}{4} + i \frac{1 - \sqrt{3}}{4}$$

إذن :

$$\cos \frac{\pi}{12} - i \sin \frac{\pi}{12} = \frac{\sqrt{2} + \sqrt{6}}{4} + i \frac{\sqrt{2} - \sqrt{6}}{4}$$

أي :

$$\cos \frac{\pi}{12} = \frac{\sqrt{2} + \sqrt{6}}{4} \quad \text{و} \quad \sin \frac{\pi}{12} = \frac{\sqrt{2} - \sqrt{6}}{4}$$

إذن :

4- زاوية متجهتين وعمدة عدد عقدي :

1- عمدة لحق المتجهة \overline{AB}

لتكن A و B نقطتين من المستوى العقدي P لحقهما z_A و z_B على التوالي .

ولتكن M نقطة من المستوى حيث : $\overrightarrow{OM} = \overrightarrow{AB}$

$$\left(\overrightarrow{e_1}, \overrightarrow{AB} \right) = \left(\overrightarrow{e_1}, \overrightarrow{OM} \right)$$

$$\left(\overrightarrow{e_1}, \overrightarrow{AB} \right) \equiv \arg z_B - z_A [2\pi]$$

حالة خاصة :

$$\left(\overrightarrow{e_1}, \overrightarrow{OA} \right) \equiv \arg z_A [2\pi]$$

$$\left(\overrightarrow{e_1}, \overrightarrow{OM} \right) \equiv \arg z_M [2\pi]$$

2- زاوية متجهتين وعمدة خارج لحقيهما

لتكن A و B و C ثلاث نقط ألقاها z_A ، z_B ، z_C على التوالي .

$$\left(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC} \right) = \left(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{e_1} \right) + \left(\overrightarrow{e_1}, \overrightarrow{AC} \right) \quad \text{لدينا :}$$

$$= -\left(\overrightarrow{e_1}, \overrightarrow{AB} \right) + \left(\overrightarrow{e_1}, \overrightarrow{AC} \right)$$

$$= -\arg(z_B - z_A) + \arg(z_C - z_A)$$

$$= \arg \frac{z_C - z_A}{z_B - z_A}$$

خاصية :

لتكن A ، B و C ثلاث نقط مختلفة مثنى مثنى من المستوى العقدي ، ألقاها z_A ، z_B ، z_C

على التوالي .

$$\left(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC} \right) \equiv \arg \frac{z_C - z_A}{z_B - z_A} [2\pi]$$

استنتاج :

$$\left(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{CD} \right) \equiv \arg \frac{z_D - z_C}{z_B - z_A} [2\pi]$$

تمرين 7 لدينا : $a = 2 - 2i$ ، $b = -4 - 2i$

$$e = \frac{1}{2} + \frac{5}{2}i \quad c = +4 + 2i$$

$$\frac{c - e}{a - e} = \frac{4 + 2i - \frac{1}{2} - \frac{5}{2}i}{2 - 2i - \frac{1}{2} - \frac{5}{2}i} \quad \text{إذن :}$$

$$= \frac{\frac{7}{2} - \frac{1}{2}i}{\frac{3}{2} - \frac{9}{2}i} = \frac{7 - i}{3 - 9i}$$

$$= \frac{(7 - i)(3 + 9i)}{9 + 81}$$

$$= \frac{21 + 9 + i(63 - 3)}{90}$$

$$= \frac{1}{3} + \frac{2}{3}i$$

$$\frac{a - e}{b - e} = \frac{2 - 2i - \frac{1}{2} - \frac{5}{2}i}{-4 - 2i - \frac{1}{2} - \frac{5}{2}i}$$

ولدينا :

$$= \frac{\frac{3}{2} - \frac{9}{2}i}{\frac{-9}{2} - \frac{9}{2}i}$$

$$= \frac{3 - 9i}{-9 - 9i} = \frac{1 - 3i}{-3 - 3i}$$

$$= \frac{-1 + 3i}{3 + 3i}$$

$$= \frac{(-1 + 3i)(3 - 3i)}{18}$$

$$= \frac{-3 + 3i + 9i + 9}{18} = \frac{6 + 12i}{18}$$

$$= \frac{1}{3} + \frac{2}{3}i$$

$$\frac{c - e}{a - e} = \frac{a - e}{b - e}$$

إذن :

$$\left(\overrightarrow{EA} ; \overrightarrow{EC} \right) \equiv \left(\overrightarrow{EB} ; \overrightarrow{EA} \right) [2\pi]$$

إذن :

ملاحظة مهمة :

إذا كانت z_A ، z_B ، z_C ألقاق النقط A ، B و C على التوالي ،

$$\frac{z_C - z_A}{z_B - z_A} = \left[1, \frac{\pm\pi}{2} \right] \Leftrightarrow \text{المثلث } ABC \text{ متساوي الساقين}$$

وقائم الزاوية

$$\frac{z_C - z_A}{z_B - z_A} = \left[1, \frac{\pm\pi}{3} \right] \Leftrightarrow \text{المثلث } ABC \text{ متساوي الأضلاع}$$

التمثيل العقدي للإزاحة

المستوى العقدي منسوب الى معلم م م م
نعتبر الازاحة t ذات المنجهة $\vec{u}(z_0)$

$$t_u(M) = M' \Leftrightarrow \overrightarrow{MM'} = \vec{u} \quad \text{لدينا}$$

$$\text{aff } \overrightarrow{MM'} = \text{aff } \vec{u} \quad \text{اذن}$$

$$z' - z = z_0 \quad \text{ومنه}$$

خاصية

التمثيل العقدي للإزاحة ذات المتجهة $\vec{u}(z_0)$ $z_0 \in \mathbb{C}$

$$z' = z + z_0 \quad \text{هو}$$

التمثيل العقدي للتحاكي

المستوى العقدي منسوب الى معلم م م م
نعتبر التحاكي h الذي مركزه $\Omega(z_0)$ ونسبته k

$$h(M) = M' \Leftrightarrow \overrightarrow{\Omega M'} = k \overrightarrow{\Omega M} \quad \text{لدينا}$$

$$\text{aff } \overrightarrow{\Omega M'} = k \cdot \text{aff } \overrightarrow{\Omega M} \quad \text{اذن}$$

$$z' - z_0 = k(z - z_0) \quad \text{ومنه}$$

خاصية

التمثيل العقدي للتحاكي الذي مركزه $\Omega(z_0)$ ونسبته k

$$z' - z_0 = k(z - z_0) \quad \text{هو}$$

تمرين 1:1- حل في \mathbb{C} المعادلتين:

$$(z + 2 - 4i)(5 + i) = 5 + 7i$$

$$2z - \bar{z} = 4 - 5i$$

2- حل في \mathbb{C}^2 النظام التالي:

$$\begin{cases} 3z + z' = 2 - 5i \\ z - z' = -2 + i \end{cases}$$

3- حدد الشكل الجبري للأعداد التالية:

$$\frac{1}{3-4i}, \frac{3-2i}{2+i}, \left(\frac{1+i}{1-i}\right)^{27}$$

4- برهن أن: $z = (1+i)^n + (1-i)^n$ عدد حقيقي و ذلك لكل n من \mathbb{N} .**تمرين 2:**

$$\forall z \in \mathbb{C} - \{-1+i\} : f(z) = \frac{2z-i}{z+1-i} \quad \text{نضع}$$

في المستوى العقدي المنسوب إلى M م م $(o, \vec{e}_1, \vec{e}_2)$ نعتبر النقط $A(-1+i)$

$$M(z) \text{ و } B\left(\frac{1}{2}i\right)$$

$$(1) \text{ حل في } \mathbb{C} \text{ المعادلة } \overline{f(z)} = i$$

$$(2) \text{ حدد مجموعة النقط } M(z) \text{ بحيث: } |f(z)| = 2$$

$$(3) \text{ نضع } z = x + iy \text{ بحيث: } (x, y) \in \mathbb{R}^2 \text{ (أ) برهن أن:}$$

$$f(z) = \frac{2x^2 + 2y^2 + 2x - 3y + 1}{(x+1)^2 + (y-1)^2} + i \frac{x + 2y - 1}{(x+1)^2 + (y-1)^2}$$

(ب) حدد في المستوى مجموعة النقط $M(z)$ بحيث $f(z)$ عدد حقيقي(ج) حدد في المستوى العقدي مجموعة النقط $M(z)$ بحيث $f(z) \in i\mathbb{R}$ **تمرين 3:**في المستوى العقدي حدد مجموعة النقط $M(z)$ في كل حالة:

$$1- |z - 1 + i| = 3$$

$$2- |z - 2| = |z + 2i|$$

$$3- |z - 1 - 2i| \leq 2$$

$$4- z + \bar{z} + z\bar{z} = 0$$

تمرين 4:

أكتب على الشكل المثلي الأعداد العقدية التالية:

$$\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}, -\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}i, -\frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$3 + i\sqrt{3}, 1 - i\sqrt{3}, (1 - i\sqrt{3})^{24}, \left(\frac{1+i}{\sqrt{3}-i}\right)^4$$

$$z = a \frac{(1 + itg\theta)^2}{1 + tg^2\theta}, a > 0 \text{ et } \theta \neq \frac{\pi}{2} + k\pi$$

$$z = \frac{1 - \cos\theta + i \sin\theta}{1 + \cos\theta - i \sin\theta}, \pi < \theta < 2\pi$$

$$z = \frac{(1 + i\sqrt{3})(\sin\theta + i \cos\theta)}{(2 - 2i)(\cos\theta - i \sin\theta)}$$

$$z = 1 + t + t^2 \quad / \quad Arg(t) \equiv \alpha [2\pi] \text{ et } |t| = 1$$

تمرين 5:في المستوى العقدي المنسوب إلى M م م (O, \vec{u}, \vec{v}) نعتبر النقط: A و B و C التي ألقاها على التوالي هي:

$$\sqrt{2}(1+i), \sqrt{2}(-1+i) \text{ و } 2i\sqrt{2}$$

$$1- \text{ تأكد أن: } AC = BC$$

$$2- \text{ حدد قياسا للزاوية } (\overrightarrow{CA}, \overrightarrow{CB})$$

$$3- \text{ استنتج طبيعة المثلث: } ABC$$

$$4- \text{ أوجد لحق النقط } D \text{ لكي يكون الرباعي } ADBC \text{ مربعا.}$$

تمرين 6:

$$\text{نعتبر العددين: } u = 2 - 2i \text{ و } v = \sqrt{6} + i\sqrt{2}$$

$$1- \text{ حدد الشكل المثلي لـ } u \text{ و } v.$$

$$2- \text{ حدد الكتابة الجبرية والمثلثية للعدي: } \frac{u}{v}$$

$$3- \text{ استنتج قيم } \sin \frac{7\pi}{12} \text{ و } \cos \frac{7\pi}{12}$$

تمرين 7:

$$\text{نضع } z_1 = 2i \text{ و } z_2 = \sqrt{3} + i \text{ و } z_3 = \sqrt{2}(1+i)$$

$$1- \text{ حدد الشكل المثلي لـ } z_1 \text{ و } z_2$$

$$2- \text{ تحقق أن: } z_1^{12} = z_2^{12}$$

$$3- \text{ حدد الشكل المثلي و الجبري للعدد: } \frac{z_3}{z_2}$$

$$4- \text{ استنتج } \sin \frac{\pi}{12} \text{ و } \cos \frac{\pi}{12}$$

$$5- \text{ لتكن } A \text{ و } B \text{ و } C \text{ صور } z_1 \text{ و } z_2 \text{ و } z_3 \text{ على التوالي:}$$

$$(أ) \text{ بين أن } o \text{ هي مركز الدائرة المحيطة بالمثلث } ABC.$$

$$(ب) \text{ حدد قياسا للزاوية: } (\overrightarrow{OB}, \overrightarrow{OC})$$

تمرين 8:لتكن a و b و c 3 أعداد عقدية مختلفة مثلي مثلي و A و B صورها على التوالي في المستوى العقدي

$$1- \text{ برهن أن: } ABC \text{ قائم الزاوية في } A \Leftrightarrow \operatorname{Re}\left(\frac{c-a}{b-a}\right) = 0$$

$$2- \text{ برهن أن: } ABC \text{ متساوي}$$

$$\text{الأضلاع} \Leftrightarrow a^2 + b^2 + c^2 = ab + bc + ac$$

الدوال الأسية

Fonctions exponentielles

-I الدالة الأسية النبرية :

تمهيد :

نعلم أن دالة اللوغاريتم النبري \ln متصلة وتزايدية قطعاً على \mathbb{R}_+^* .

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \ln x = +\infty \quad \text{و} \quad \lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x > 0}} \ln x = -\infty :$$

إذن الدالة \ln تقابل من \mathbb{R}_+^* نحو \mathbb{R} .

إذن : تقبل دالة عكسية معرفة من \mathbb{R} نحو \mathbb{R}_+^* .

تعريف :

الدالة العكسية لدالة اللوغاريتم النبري هي **الدالة الأسية النبرية** والتي نرمز لها بـ \exp .

استنتاج :

$$\forall x \in \mathbb{R}_+^* ; \quad \forall y \in \mathbb{R} \\ \ln x = y \quad \Leftrightarrow \quad x = \exp y$$

ملاحظة :

$$\forall x \in \mathbb{R} ; \quad \exp(x) = e^x$$

خاصيات :

$$\exp(1) = e^1 = e \quad -1$$

$$\exp(0) = e^0 = 1$$

$$\forall x \in \mathbb{R} ; \quad e^x \succ 0 \quad \bullet \quad -2$$

$$\forall x \in \mathbb{R} ; \quad \ln e^x = x \quad \bullet$$

$$\forall x \in \mathbb{R}_+^* ; \quad e^{\ln x} = x \quad \bullet$$

3- الدالة \exp متصلة وتزايدية قطعاً على \mathbb{R} .

$$\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2 ; \quad e^x = e^y \quad \Leftrightarrow \quad x = y \quad \bullet$$

$$e^x \succ e^y \quad \Leftrightarrow \quad x \succ y \quad \bullet$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} e^x = +\infty \quad \bullet$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} e^x = 0^+ \quad \bullet$$

$$\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2 ; \quad e^{x+y} = e^x \cdot e^y \quad \bullet \quad -4$$

$$e^{x-y} = \frac{e^x}{e^y} \quad \bullet$$

$$e^{-x} = \frac{1}{e^x} \quad \bullet$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^x}{x} = +\infty$$

-a

برهان:

$$X = e^x \quad \text{نضع:}$$

$$(x \rightarrow +\infty) \Leftrightarrow (X \rightarrow +\infty) \quad \ln X = x \quad \text{إذن:}$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^x}{x} = \lim_{X \rightarrow +\infty} \frac{X}{\ln X} = \lim_{X \rightarrow +\infty} \frac{1}{\frac{\ln X}{X}} = \frac{1}{0^+} = +\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} x e^x = 0$$

-b

برهان:

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} x e^x = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x}{e^{-x}}$$

لدينا:

$$X = -x \quad \text{نضع:}$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} x e^x = \lim_{X \rightarrow +\infty} \frac{-X}{e^X} \quad \text{إذن:}$$

$$= \lim_{X \rightarrow +\infty} \frac{-1}{\frac{e^X}{X}} = \frac{-1}{+\infty} = 0$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - 1}{x} = 1$$

-c

برهان:

$$e^x = X \quad \text{نضع:}$$

$$(x \rightarrow 0) \Leftrightarrow (X \rightarrow 1) \quad \text{إذن:}$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - 1}{x} = \lim_{X \rightarrow 1} \frac{X - 1}{\ln X} \quad \text{ومنه:}$$

$$= \lim_{X \rightarrow 1} \frac{1}{\frac{\ln X}{X - 1}} = 1$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} x^n e^x = 0$$

-d

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^x}{x^n} = +\infty$$

-e

برهان :

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^x}{x^2} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{e^{x/2}}{x} \right)^2$$

$$= \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{e^{x/2}}{2 \times \frac{x}{2}} \right)^2$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^x}{x^2} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{4} \left(\frac{e^{x/2}}{\frac{x}{2}} \right)^2$$

نضع : $X = \frac{x}{2}$

$$= \lim_{X \rightarrow +\infty} \frac{1}{4} \left(\frac{e^X}{X} \right)^2$$

$$= +\infty$$

$x \geq 2$; $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^x}{x^n} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{e^{x/n}}{n \frac{x}{n}} \right)^n$

$$= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{n^n} \left(\frac{e^{x/n}}{\frac{x}{n}} \right)^n$$

نضع : $X = \frac{x}{n}$

$$= \lim_{X \rightarrow +\infty} \frac{1}{n^n} \left(\frac{e^X}{X} \right)^n$$

$$= +\infty$$

تطبيق :

أحسب :

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{x^2-x} - 1}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{x^2-x} - 1}{x^2 - x} \cdot \frac{x^2 - x}{x}$$

$$= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{x^2-x} - 1}{x^2 - x} \cdot (x-1)$$

$$= 1 \cdot (0-1) = -1$$

لأن : $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{x^2-x} - 1}{x^2 - x} = \lim_{X \rightarrow 0} \frac{e^X - 1}{X} = 1$

(وضعنا : $X = x^2 - x$)

6- مشتقة الدالة الأسية النبرية :

$$\forall x \in \mathbb{R} ; \quad \text{Log } e^x = x \quad \text{لدينا :}$$

$$\forall x \in \mathbb{R} ; \quad (\text{Log } e^x)' = 1 \quad \text{إذن :}$$

$$\forall x \in \mathbb{R} ; \quad \text{Log}'(e^x) \times (e^x)' = 1 \quad \text{أي :}$$

$$\forall x \in \mathbb{R} ; \quad \frac{(e^x)'}{e^x} = 1$$

$$\forall x \in \mathbb{R} ; \quad (e^x)' = e^x \quad \text{إذن :}$$

تعميم :

لتكن f دالة عددية معرفة بـ :

إذا كانت u دالة قابلة للاشتقاق على مجال I .

فإن : f قابلة للاشتقاق على المجال I .

$$\forall x \in I ; \quad f(x)' = (e^{u(x)})' = u'(x) \cdot e^{u(x)}$$

تطبيق :

أحسب مشتقة الدالة f في الحالات التالية :

$$f(x) = \frac{e^x - 1}{x + 1} \quad -1$$

$$\begin{aligned} f'(x) &= \frac{e^x(x+1) - (e^x - 1)}{(x + 1)^2} \\ &= \frac{x e^x + 1}{(x + 1)^2} \end{aligned}$$

$$f(x) = e^{\sqrt{x}} \quad -2$$

$$\begin{aligned} f'(x) &= (e^{\sqrt{x}})' \\ &= (\sqrt{x})' \times e^{\sqrt{x}} \\ &= \frac{1}{2\sqrt{x}} \cdot e^{\sqrt{x}} \end{aligned}$$

$$f(x) = x e^{(x^2-1)} \quad -3$$

$$\begin{aligned} f'(x) &= 1 \cdot e^{(x^2-1)} + x (2x) e^{(x^2-1)} \\ &= (1 + 2x^2) e^{(x^2-1)} \end{aligned}$$

تمارين تطبيقية :

أحسب النهايات :

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \sqrt{x} e^{-x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\sqrt{x}}{e^{-x}} \quad -1$$

$$= \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{x}{e^{2x}} \right)^{\frac{1}{2}}$$

نضع : $X = 2x$

$$= \lim_{X \rightarrow +\infty} \left(\frac{1}{2} \cdot \frac{X}{e^X} \right)^{\frac{1}{2}} = 0$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} x (e^{1/x} - 1) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^{1/x} - 1}{\frac{1}{x}} \quad -2$$

نضع : $X = \frac{1}{x}$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} x (e^{1/x} - 1) = \lim_{X \rightarrow 0} \frac{e^X - 1}{X} = 1$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^x + 1}{e^x + 3} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1 + e^{-x}}{1 + 3e^{-x}} = 1 \quad -3$$

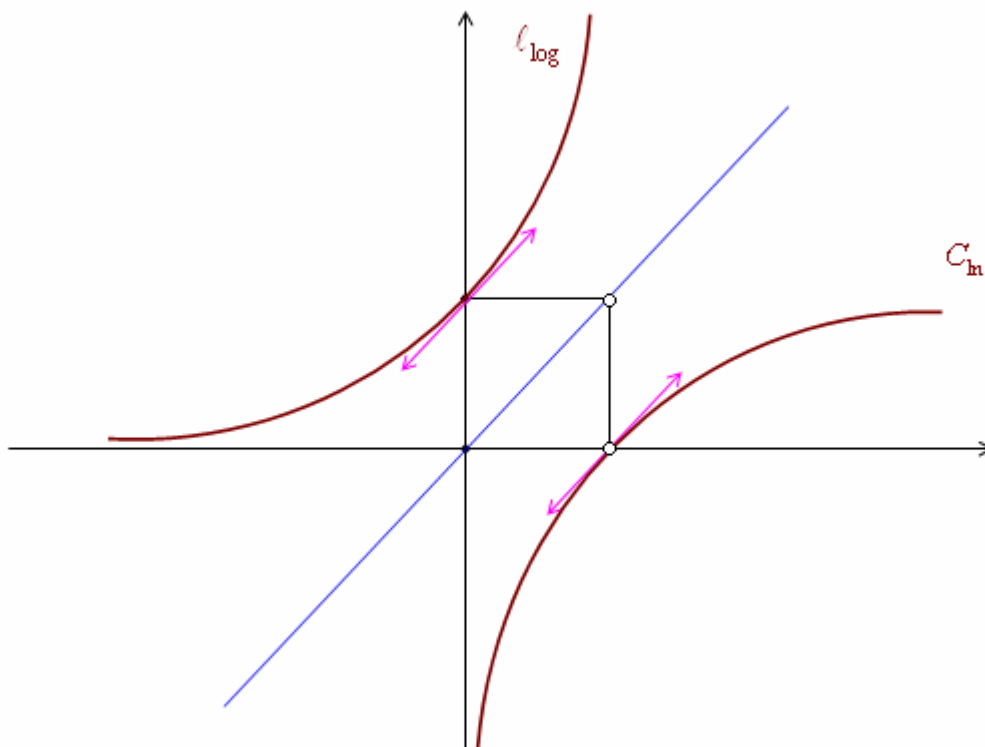
-7- التقعر:

$\forall x \in \mathbb{R} ; (e^x)' = e^x$ لدينا :

$\forall x \in \mathbb{R} ; (e^x)'' = (e^x)' = e^x$ إذن :

$\forall x \in \mathbb{R} ; e^x > 0$ وبما أن :

فإن : ℓ المنحنى الممثل للدالة الأسية النبرية (محدب).



تطبيق 4 :

$$f(x) = (x - 1) \cdot e^x$$

• مجموعة التعريف :

$$D_f = \mathbb{R} =]-\infty, +\infty[$$

• النهايات :

$$\bullet \lim_{x \rightarrow +\infty} (x - 1) \cdot e^x = +\infty$$

$$\bullet \lim_{x \rightarrow -\infty} (x - 1) \cdot e^x = -1 \cdot 0 \quad (F.I)$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} x e^x = 0$$

• التغيرات :

لدينا : لكل x من \mathbb{R} .

$$f(x) = (x - 1) \cdot e^x$$

$$f'(x) = 1 \cdot e^x + (x - 1) e^x$$

إذن :

$$= x e^x$$

• جدول التغيرات :

x	$-\infty$	0	$+\infty$
$f'(x)$	$-$	0	$+$
$f(x)$	0	-1	$+\infty$

• الفروع اللانهائية :

$$\lim_{+\infty} f(x) = +\infty$$

لدينا :

$$\lim_{+\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{+\infty} \frac{x - 1}{x} \cdot e^x$$

نحسب :

$$= 1 \times (+\infty) = +\infty$$

إذن : (ℓ_f) يقبل فرعاً شلجماً اتجاهه محور الأرتاب.



• التقعر ونقط الانعطاف :

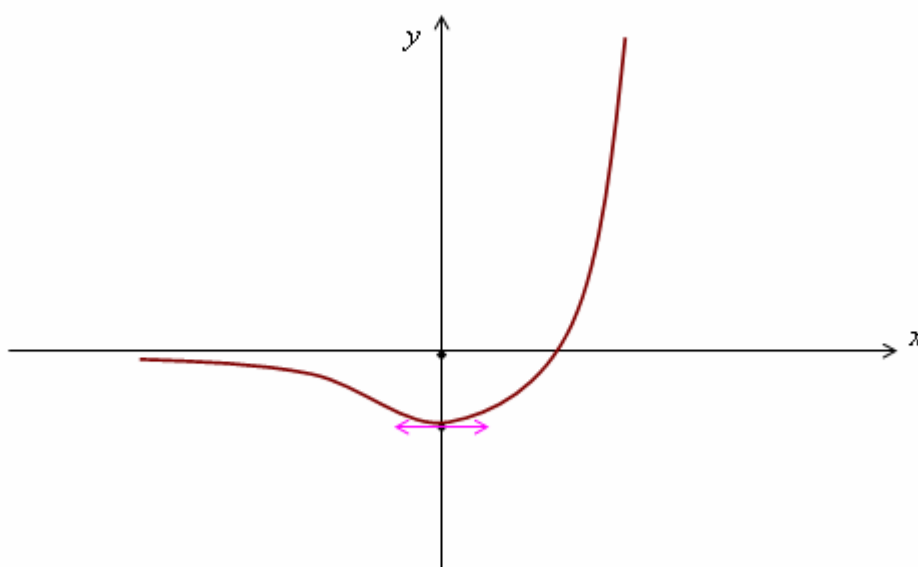
$$\forall x \in \mathbb{R} ; \quad f'(x) = x e^x$$

لدينا :

$$f''(x) = 1 e^x + x e^x$$

$$= (1 + x) \cdot e^x$$

x	$-\infty$	-1	$+\infty$
$f''(x)$	$-$	0	$+$
<u>القعر</u>			



تطبيق 5 :

$$f(x) = \frac{e^x}{e^x - 1}$$

• مجموعة التعريف :

$$\begin{aligned} D_f &= \{x \in \mathbb{R} / e^x \neq 1\} \\ &= \{x \in \mathbb{R} / x \neq 0\} = \mathbb{R}^* \end{aligned}$$

• النهايات :

$$\bullet \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^x}{e^x - 1} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{1 - \frac{1}{e^x}} = 1$$

$$\bullet \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{e^x}{e^x - 1} = \frac{0}{0 - 1} = 0$$

$$\bullet \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{e^x}{e^x - 1} = \frac{1}{0^+} = +\infty$$

$$\bullet \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{e^x}{e^x - 1} = \frac{1}{0^-} = -\infty$$

• التغيرات :

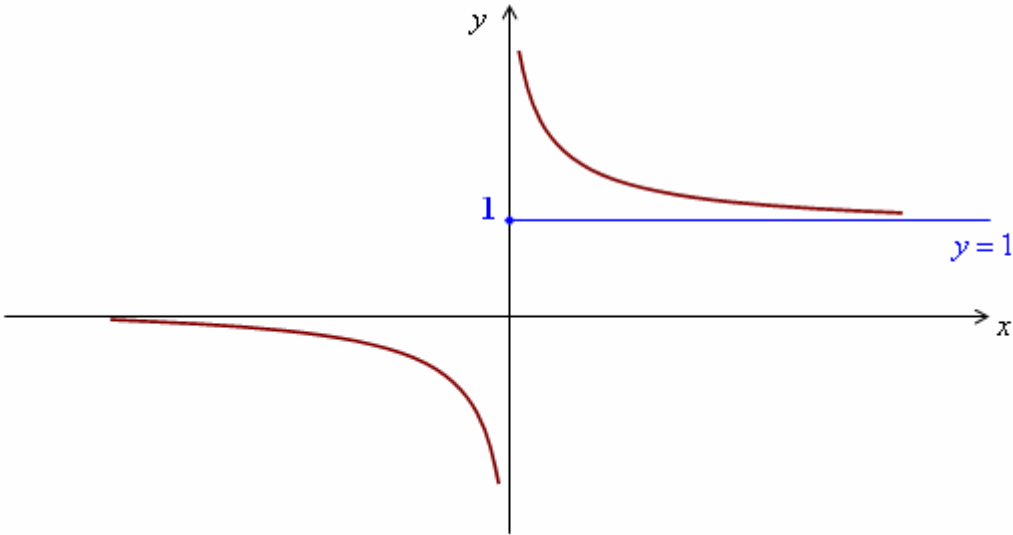
$$\forall x \in \mathbb{R}^* ; \quad f(x) = \frac{e^x}{e^x - 1} \quad \text{لدينا :}$$

$$f'(x) = \frac{e^x(e^x - 1)' - e^x(e^x)}{(e^x - 1)^2}$$

$$= \frac{-e^x}{(e^x - 1)^2} < 0$$

• جدول التغيرات :

x	$-\infty$	0	$+\infty$
$f'(x)$		<div><div></div><div></div></div>	
$f(x)$	<div><div>0</div><div></div></div>	<div><div>$+\infty$</div><div>$-\infty$</div></div>	<div><div></div><div>1</div></div>



الدالة الأسية للأساس a

تمهيد :

لتكن $a \in \mathbb{R}_+^* - \{1\}$
 نعلم أن الدالة $(x \mapsto \log_a x)$ متصلة ورتيبة قطعاً على \mathbb{R}_+^* .
 إذن : هي تقابل من \mathbb{R}_+^* نحو \mathbb{R} .
 ومنه فهي تقبل دالة عكسية معرفة من \mathbb{R} نحو \mathbb{R}_+^* .

تعريف :

الدالة العكسية للدالة $(x \mapsto \log_a x)$ تسمى **الدالة الأسية للأساس a** ، ونرمز لها بـ $(x \mapsto \exp_a(x))$.

استنتاج :

$$\forall x \in \mathbb{R}_+^* ; \quad \forall y \in \mathbb{R} \\ \log_a(x) = y \quad \Leftrightarrow \quad x = \exp_a(y)$$

ملاحظة :

$$\forall x \in \mathbb{R} ; \quad \exp_a(x) = a^x \quad (1)$$

$$\forall x \in \mathbb{R} ; \quad a^x = e^{x \ln a} \quad (2)$$

$$\forall x \in \mathbb{R} ; \quad 1^x = 1 \quad (3)$$

$$\forall x \in \mathbb{R} ; \quad a^x \succ 0 \quad (4)$$

دراسة الدالة $f(x \mapsto a^x)$

1- مجموعة التعريف :

$$D = \mathbb{R} =]-\infty, +\infty[$$

2- النهايات :

• الحالة 1 : $a > 1$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} a^x = \lim_{x \rightarrow +\infty} e^{x \ln a} = +\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} a^x = \lim_{x \rightarrow -\infty} e^{x \ln a} = 0$$

• الحالة 2 : $0 < a < 1$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} a^x = 0$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} a^x = +\infty$$

3- التغيرات :

$$\forall x \in \mathbb{R} ; \quad a^x = e^{x \ln a}$$

$$\forall x \in \mathbb{R} ; \quad (a^x)' = \ln a \cdot a^x \quad \text{إذن :}$$

$$\forall x \in \mathbb{R} ; \quad (a^x)' = \ln a \cdot a^x \quad \text{إذن :}$$

ومنه إشارة $(a^x)'$ هي إشارة $\ln a$.

ملاحظة :

لدينا : $\forall x \in \mathbb{R} ; \quad (a^x)'' = (\ln a \cdot a^x)'$
 $= \ln^2 a \cdot a^x > 0$

• الحالة 1 : $a > 1$

x	$-\infty$	$+\infty$
$f'(x)$		+
$f(x)$	0	$+\infty$

• الحالة 2 : $0 < a < 1$

x	$-\infty$	$+\infty$
$(a^x)'$		-
a^x	$+\infty$	0

تطبيقات :

أحسب النهايات التالية :

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x = \lim_{x \rightarrow +\infty} e^{x \ln \left(1 + \frac{1}{x}\right)} \quad (1)$$

$$= \lim_{x \rightarrow +\infty} e^{\frac{\ln \left(1 + \frac{1}{x}\right)}{\frac{1}{x}}}$$

نضع : $X = \frac{1}{x}$

$$(x \rightarrow +\infty) \Leftrightarrow (X \rightarrow 0)$$

$$\lim_{X \rightarrow 0} e^{\frac{\ln(1+X)}{X}} = e^1 = e \quad \text{إذن :}$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} (1+x)^{\frac{1}{x}} = \lim_{x \rightarrow 0^+} e^{\ln(1+x)^{\frac{1}{x}}} \quad (2)$$

$$= \lim_{x \rightarrow 0^+} e^{\frac{\ln(1+x)}{x}}$$

$$= e^1 = e$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} x^x = \lim_{x \rightarrow 0^+} e^{x \ln x} = e^0 = 1 \quad (3)$$

حدد مشتقة الدالة f في الحالات التالية :

$$f(x) = 4^x \quad (1)$$

$$\begin{aligned} f(x) &= e^{x \ln 4} \\ f'(x) &= (\ln 4) \cdot e^{x \ln 4} && \text{إذن :} \\ &= (\ln 4) \cdot 4^x \end{aligned}$$

$$f(x) = \frac{2^x}{x} \quad (2)$$

$$\begin{aligned} f(x) &= \frac{e^{x \ln 2}}{x} \\ f'(x) &= \frac{(\ln 2) \times 2^x \times x - 2^x}{x^2} && \text{إذن :} \\ &= \frac{(x \ln 2 - 1) 2^x}{x^2} \end{aligned}$$

$$f(x) = x^{\frac{1}{x}} \quad (3)$$

$$\begin{aligned} f(x) &= e^{\frac{\ln x}{x}} \\ f'(x) &= \left(\frac{\ln x}{x} \right)' \cdot e^{\frac{\ln x}{x}} && \text{إذن :} \\ &= \frac{1 - \ln x}{x^2} \cdot e^{\frac{\ln x}{x}} \end{aligned}$$

$$f(x) = 3^{1-x} \quad (4)$$

$$\begin{aligned} f(x) &= e^{(1-x) \ln 3} && \text{لدينا :} \\ f'(x) &= ((1-x) \cdot \ln 3)' \cdot 3^{1-x} && \text{إذن :} \\ &= -\ln 3 \cdot 3^{1-x} \end{aligned}$$

$$f(x) = \left(1 + \frac{1}{x} \right)^x \quad (5)$$

$$f(x) = e^{x \ln \left(1 + \frac{1}{x} \right)} \quad \text{لدينا :}$$

$$f'(x) = \left(x \ln \left(1 + \frac{1}{x} \right) \right)' \cdot e^{x \ln \left(1 + \frac{1}{x} \right)} \quad \text{إذن :}$$

$$= \left(\ln \left(1 + \frac{1}{x} \right) + x \cdot \frac{-\frac{1}{x^2}}{\frac{1+x}{x}} \right) \cdot e^{x \ln \left(1 + \frac{1}{x} \right)}$$

$$f'(x) = \left(\ln \left(1 + \frac{1}{x} \right) - \frac{1}{1+x} \right) \cdot e^{x \ln \left(1 + \frac{1}{x} \right)}$$

تمارين حول الدوال الأسية

تمرين 1

أحسب $\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(1 - \frac{1}{x}\right)^x$ $\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(x + \frac{1}{x}\right)^x$

تمرين 2

أدرس و مثل مبيانيا الدالة f حيث $\begin{cases} f(x) = x^{2x} \\ f(0) = 1 \end{cases}$

تمرين 3

1- حل في \mathbb{R} المعادلات

$$e^{x^2-3x-3} = e \quad ; \quad e^{4x-3} = 2$$

$$3e^{3x} - 2e^{2x} - e^x = 0$$

2- حل في \mathbb{R} المتراجحات $3^{2x} - 3^x - 6 > 0$ $2e^{2x} - 3e^x + 1 < 0$ $e^x - 2e^{-x} + 1 > 0$

3- حل في \mathbb{R}^2 النظام $\begin{cases} x + 2y = 1 \\ 2^x = 3^y \end{cases}$

تمرين 4

أحسب $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{2x} - e^x}{x}$ $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - 1}{e^{2x} - 3e^x + 2}$ $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^x + 1}{x^3}$ $\lim_{x \rightarrow -\infty} x^2 e^x$ $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^x + 2}{e^x - 1}$

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} x^{\sqrt{x}} \quad \lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sqrt{x}^x - 1}{x - 1}$$

تمرين 5

I- نعتبر الدالة العددية f لمتغير حقيقي المعرفة بما يلي $f(x) = 2e^{2x} - 3e^x + 1$

1-أ- حدد D_f ونهايات f عند محددات D_f

ب- أدرس تغيرات f

2-أ- حدد نقطة تقاطع C_f و محور الأفاصيل

ب- حدد معادلة المماس لـ C_f عند النقطة ذات الأفصول 0

ج- أدرس الفروع اللانهائية لـ C_f

د- أنشئ C_f

II- نعتبر الدالة g المعرفة بـ $g(x) = \ln(2e^{2x} - 3e^x + 1)$

1-أ- حدد D_g ونهايات g عند محددات D_g

ب- أدرس تغيرات g

2- أدرس الفروع اللانهائية لـ C_g ثم أنشئ C_g

تمرين 6

$$\begin{cases} f(x) = |2x(1 - \ln x)| & x > 0 \\ f(x) = e^x - 1 - 2\sqrt{1 - e^x} & x \leq 0 \end{cases}$$

نعتبر الدالة العددية f لمتغير حقيقي المعرفة بما يلي

- 1- أدرس اشتقاق و اتصال f عند النقطتين 0 و e و أعط التأويل الهندسي للنتائج المحصل عليها
- 2- أحسب نهايات f عند محددات D_f ثم أدرس الفروع للانتهائية لـ C_f
- 3- أدرس تغيرات f و أنشئ C_f $\| \vec{i} \| = \| \vec{j} \| = 2cm$
- 4- بين أن g قصور الدالة f على $]-\infty; 0]$ تقابل من $]-\infty; 0]$ نحو مجال J يجب تحديده

أحسب $g^{-1}(x)$ لكل x من J

تمرين 7

- نعتبر الدالة العددية للمتغير الحقيقي x المعرفة بـ
- $$f(x) = 2x + \frac{e^x}{e^x - 1}$$
- 1- حدد D_f و نهايات f عند محددات D_f
 - 2- أدرس تغيرات f و أعط جدول تغيراتها
 - 3- أدرس الفروع للانتهائية لمنحنى f
 - 4- بين أن $A\left(0; \frac{1}{2}\right)$ مركز تماثل للمنحنى C_f
 - 5- أنشئ C_f في مستوى منسوب إلى م.م.م
 - 6- لتكن $m \in \mathbb{R}$. حدد مبيانيا عدد حلول المعادلة $2xe^x - (m-1)e^x - 2x + m = 0$

تمرين 8

- I- نعتبر الدالة f المعرفة على $D = [0; 1[\cup]1; +\infty[$ بحيث
- $$f(x) = \frac{2x^2}{x^2 - 1} + \ln|x^2 - 1|$$
- 1- أحسب نهايات f عند محددات D .
 - 2- بين أن $f'(x) = \frac{2x(x^2 - 3)}{(x^2 - 1)^2}$ لكل x من D و أعط جدول تغيرات f
 - 3- استنتج مما سبق إشارة $f(x)$ لكل x من D
- II- لتكن g الدالة المعرفة على D بـ
- $$g(x) = x \ln|x^2 - 1|$$
- 1- أ- أحسب نهايات g عند محددات D .
 - ب- أحسب $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{g(x)}{x}$ و أعط تأويلا هندسيا للنتيجة المحصل عليها.
 - 2- بين لكل x من D $g'(x) = f(x)$ و أعط جدول تغيرات g .
 - 3- أ- استنتج من دراسة الدالة f إحداثيتي I نقطة انعطاف المنحنى C_g
 - ب- حل في D المعادلة $g(x) = 0$
 - ج- أنشئ C_g

تمرين 9

الجزء الأول

- لتكن f الدالة المعرفة بـ
- $$f(x) = \left(x - \frac{1}{2}\right)e^{2x} - 4(x-1)e^x - 2$$
- 1- أحسب $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x)$ و بين لكل x من \mathbb{R}
- $$f(x) = xe^{2x} \left(1 - \frac{1}{2x} - \frac{4}{e^x} + \frac{4}{xe^x} - \frac{2}{xe^{2x}}\right)$$
- ثم استنتج $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$

2- أدرس تغيرات f

3- أ- أدرس الفروع اللانهائية لـ C_f

ب- بين أن C_f يقطع محور الأفاصل في نقطة x_0 تنتمي إلى $[-2; -1]$

$$\left(e^4 \approx \frac{225}{4}; \quad e^2 \approx \frac{15}{2}; \quad e \approx \frac{11}{4} \right)$$

ج- أنشئ C_f $\|\vec{i}\| = \|\vec{j}\| = 2cm$

الجزء الثاني

لتكن g الدالة المعرفة بـ

$$\begin{cases} g(x) = (x^2 - 4x) \ln x - \frac{1}{2}(x^2 - 8x + 4) & x > 0 \\ g(0) = -2 \end{cases}$$

1- بين أن $g(x) = f(\ln x)$ $\forall x \in]0; +\infty[$

2- أدرس اتصال و اشتقاق g في يمين 0

3- أدرس تغيرات g

4- أ- أدرس الفروع اللانهائية لـ C_g

ب- أستنتج من 2- ب- في الجزء الأول , تأطيرا لأصول نقطة تقاطع C_g ومحور الأفاصل

ج- حدد نصف المماس لـ C_g في النقطة ذات الأصول 0 ثم أنشئ C_g

التكامل

I- تكامل دالة متصلة على مجال

1- تعريف و ترميز

لتكن f دالة متصلة على مجال I و a و b عنصرين من I .
إذا كانت F و G دالتين أصليتين للدالة f على I فإن $F(b)-F(a)=G(b)-G(a)$.
أي أن العدد الحقيقي $F(b)-F(a)$ غير مرتبط باختيار الدالة الأصلية F .

تعريف

لتكن f دالة متصلة على مجال I و a و b عنصرين من I .
العدد الحقيقي $F(b)-F(a)$ حيث F دالة أصلية للدالة f على I , يسمى تكامل الدالة f من a إلى b
ويكتب $\int_a^b f(x) dx$ ويقرأ مجموع $f(x) dx$ من a إلى b أو تكامل من a إلى b لـ $f(x) dx$.

a و b يسميا محدا التكامل $\int_a^b f(x) dx$

في الكتابة $\int_a^b f(x) dx$ يمكن تعويض x بأي حرف آخر ، بمعنى أن

$$\int_a^b f(x) dx = \int_a^b f(t) dt = \int_a^b f(u) du = \dots\dots$$

من أجل تبسيط الكتابة $F(b)-F(a)$ نكتبها على الشكل $\int_a^b f(x) dx = [F(x)]_a^b$

أمثلة

$$* \text{ نحسب } \int_1^2 \frac{1}{x} dx$$

الدالة $x \rightarrow \frac{1}{x}$ متصلة على $[1;2]$ و دالة أصلية لها هي $x \rightarrow \ln x$

$$\text{اذن } \int_1^2 \frac{1}{x} dx = [\ln x]_1^2 = \ln 2$$

$$* \text{ أحسب } \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{1}{\cos^2 x} dx \quad ; \quad \int_{-1}^1 \frac{1}{x^2 + 1} dx \quad ; \quad \int_{\frac{\pi}{2}}^0 \cos x dx$$

2- خاصيات

أ- خاصيات

لتكن f دالة متصلة على مجال I و a و b و c عناصر من I

$$\int_a^b f(x) dx = -\int_b^a f(x) dx \quad * \quad \int_a^a f(x) dx = 0 \quad *$$

$$* \quad \int_a^b f(x) dx = \int_a^c f(x) dx + \int_c^b f(x) dx \quad (\text{علاقة شال})$$

أمثلة

$$\text{أحسب } I = \int_{-1}^1 |x| dx$$

$$\int_{-1}^1 |x| dx = \int_{-1}^1 |x| dx = \int_{-1}^0 -x dx + \int_0^1 x dx = \left[-\frac{1}{2} x^2 \right]_{-1}^0 + \left[\frac{1}{2} x^2 \right]_0^1 = 1$$

(ب-) لتكن f دالة متصلة على مجال I و a عنصرا من I

$$\varphi: I \rightarrow \mathbb{R}$$

$$x \rightarrow \int_a^x f(t) dt$$

لدينا $\forall x \in I \quad \varphi(x) = F(x) - F(a)$ حيث F دالة أصلية لـ f على I .

اذن φ قابلة للاشتقاق على I و $\varphi' = f$ أي أن $\varphi(a) = 0$ دالة الأصلية للدالة f على I التي تنعدم

في a

خاصية

لتكن f دالة متصلة على مجال I و a عنصرا من I .

الدالة المعرفة على I بما يلي $x \rightarrow \int_a^x f(t) dt$ هي الدالة الأصلية لـ f على I التي تنعدم في a

مثال نعلم أن الدالة $x \rightarrow \ln x$ هي الدالة الأصلية لـ $x \rightarrow \frac{1}{x}$ على $]0; +\infty[$ التي تنعدم في 1.

$$\forall x \in]0; +\infty[\quad \ln x = \int_1^x \frac{1}{t} dt$$

تمرين حدد الدالة الأصلية لـ f على $]0; +\infty[$ التي تنعدم في 2 حيث $\forall x \in]0; +\infty[\quad f(x) = \frac{1}{x} \ln x$

(ج) - خاصية

لتكن f و g دالتين متصلتين على $[a; b]$ و λ عدد حقيقي ثابت

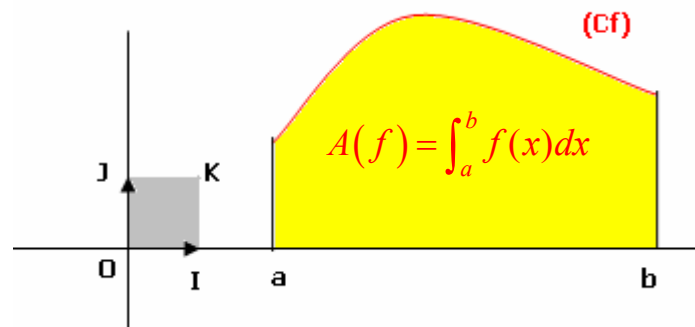
$$\int_a^b (\lambda f(x)) dx = \lambda \int_a^b f(x) dx \quad \int_a^b (f(x) + g(x)) dx = \int_a^b f(x) dx + \int_a^b g(x) dx$$

تمرين حدد $\int_0^1 (x^2 - 3x + 1) dx$; $\int_0^\pi \cos^4 x dx$ (يمكن اخطا $\cos^4 x$)

تمرين نعتبر $I = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{\cos x}{\sin x + \cos x} dx$ و $J = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{\sin x}{\sin x + \cos x} dx$

أحسب $I + J$ و $I - J$ واستنتج I ; J

د التاويل الهندسى للعدد $\int_a^b f(x) dx$



خاصية

إذا كانت f دالة متصلة و موجبة على $[a; b]$ ($a < b$) فإن مساحة الحيز المحصور بين منحنى الدالة f و محور الأفصيل و المستقيمين المعرفتين على التوالي بالمعادلتين $x = a$ و $x = b$ هي

$$A(f) = \int_a^b f(x) dx \quad \text{بوحدّة قياس المساحات}$$

ملاحظة

إذا كان المستوى منسوب إلى معلم متعامدين فإن وحدة قياس المساحة هي مساحة المربع OIJK

تمرين

$$\text{نعتبر } f(x) = \frac{1}{x^2}$$

أنشئ C_f ($\|\vec{i}\| = 1cm$ $\|\vec{j}\| = 2cm$)

أحسب بـ cm^2 مساحة الحيز المحصور بين C_f و محور الأفاصيل و المستقيمين المعرفين بالمعادلتين $x=3$; $x=1$.

II- تقنيات حساب التكاملات

1- الاستعمال المباشر لدوال الأصلية أمثلة

* أحسب $\int_1^e \frac{(\ln x)^2}{x} dx$ نلاحظ أن $\frac{(\ln x)^2}{x}$ على شكل $u'u^2$ حيث $u(x) = \ln x$

و نعلم أن الدالة الأصلية لـ $u'u^2$ هي $\frac{1}{3}u^3$ إذن $\frac{1}{3}$ $\int_1^e \frac{(\ln x)^2}{x} dx = \left[\frac{1}{3} u^3(x) \right]_1^e = \left[\frac{1}{3} \ln^3 x \right]_1^e = \frac{1}{3}$

* أحسب $\int_0^1 \frac{2}{e^x + 1} dx$ لدينا $\frac{2}{e^x + 1} = 2 \frac{e^{-x}}{1 + e^{-x}}$ بهذا التحويل نلاحظ أن $\frac{2}{1 + e^x}$ يكتب على شكل

$-2 \frac{u'}{u}$ حيث $u(x) = 1 + e^{-x}$ إذن $\int_0^1 \frac{2}{e^x + 1} dx = \left[-2 \ln |u(x)| \right]_0^1 = \left[-\ln(1 + e^{-x}) \right]_0^1$

1- تمرين حدد $\int_0^{\frac{\pi}{4}} \sin^3 x dx$

2- أ- أوجد a و b و c حيث $\forall x \neq 0 \quad \frac{2x^4 + x^2 + x - 1}{x^3 + x} = ax + \frac{b}{x} + \frac{c}{x^2 + 1}$

ب- استنتج قيمة $\int_1^{\sqrt{3}} \frac{2x^4 + x^2 + x - 1}{x^3 + x} dx$

3- بين أن التعبير $\frac{1}{x^2 - 2x + 5}$ يكتب على شكل $\frac{1}{2} \frac{u'}{u^2 + 1}$ حيث u دالة يجب تحديدها .

استنتج قيمة $\int_1^{1+2\sqrt{3}} \frac{1}{x^2 - 2x + 5} dx$

4- أحسب $\int_0^1 \frac{1}{(x+1)(x+2)} dx$; $\int_e^{e^2} \frac{1}{x \ln x} dx$ $\left(\frac{1}{x \ln x} = \frac{\frac{1}{x}}{\ln x} \right)$

2- المكاملة بالأجزاء

لتكن f و g دالتين قابلتين للاشتقاق على $[a; b]$ بحيث f' و g' متصلتين على $[a; b]$ نعلم أن

$$\forall x \in [a; b] \quad (fg)'(x) = f'(x)g(x) + f(x)g'(x)$$

$$\forall x \in [a; b] \quad f'(x)g(x) = (fg)'(x) - f(x)g'(x)$$

خاصية

$$\int_a^b f'(x)g(x)dx = [(fg)(x)]_a^b - \int_a^b f(x)g'(x)dx$$

مثال أحسب $\int_0^{\frac{\pi}{2}} x \cos x dx$ نضع $u'(x) = \cos x$; $v(x) = x$

ومنه $u(x) = \sin x$; $v'(x) = 1$

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} x \cos x dx = \left[x \sin x \right]_0^{\frac{\pi}{2}} - \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin x dx = \left[x \sin x \right]_0^{\frac{\pi}{2}} - \left[-\cos x \right]_0^{\frac{\pi}{2}} = \frac{\pi}{2} - 1 \quad \text{إذن}$$

تمارين

$$K = \int_0^{\frac{\pi}{2}} e^x \sin x dx \quad ; \quad J = \int_0^{\pi} x^2 \sin x dx \quad ; \quad I = \int_1^e \ln x dx \quad \text{أحسب}$$

الحل

$$K = \left[e^x \sin x \right]_0^{\frac{\pi}{2}} - \int_0^{\frac{\pi}{2}} e^x \cos x dx = \left[e^x \sin x \right]_0^{\frac{\pi}{2}} - \left[e^x \cos x \right]_0^{\frac{\pi}{2}} - K$$

$$K = \frac{1}{2} \left(\left[e^x \sin x \right]_0^{\frac{\pi}{2}} - \left[e^x \cos x \right]_0^{\frac{\pi}{2}} \right) = \dots\dots\dots$$

$$\int_0^1 \ln \left| \frac{x+2}{x+1} \right| dx \quad \int_0^1 x \sqrt{x+3} dx \quad \int_0^3 (x-1)e^{2x} dx \quad \int_1^2 x^2 \ln x dx \quad \text{أحسب} \quad \text{1- تمارين}$$

$$\text{2- باستعمال المكاملة بالأجزاء أوجد الدوال الأصلية لـ } f \text{ على } \left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2} \right] \text{ حيث } f(x) = \frac{x}{\cos^2 x}$$

$$\text{3- أحسب } I = \int_0^x e^t \cos^2 t dt \quad (J = \int_0^x e^t \sin^2 t dt \text{ يمكن اعتباره})$$

III- التكامل و الترتيب1- مقارنة تكاملين

(a) لتكن f دالة متصلة على $[a; b]$ و F دالة أصلية لـ f على $[a; b]$

$$\forall x \in [a; b] \quad F'(x) = f(x) \quad \int_a^b f(x) dx = F(b) - F(a)$$

إذا كانت f موجبة على $[a; b]$ فإن F تزايدية على $[a; b]$

$$\text{وحيث أن } a \leq b \text{ فإن } F(a) \leq F(b) \text{ إذن } \int_a^b f(x) dx \geq 0$$

خاصية

لتكن f دالة متصلة على $[a; b]$ ($a \leq b$)

$$\text{إذا كانت } f \text{ موجبة على } [a; b] \text{ فإن } \int_a^b f(x) dx \geq 0$$

(b) خاصية

لتكن f و g دالتين متصلتين على $[a; b]$ ($a \leq b$)

$$\text{إذا كانت } f \leq g \text{ على } [a; b] \text{ فإن } \int_a^b f(x) dx \leq \int_a^b g(x) dx$$

مثال

$$\text{نؤطر } I = \int_0^1 \frac{x^2}{1+x} dx$$

$$\text{لدينا } 1 \leq 1+x \leq 2 \Leftrightarrow \frac{x^2}{2} \leq \frac{x^2}{1+x} \leq x^2 \quad \forall x \in [0; 1] \text{ ومنه } \int_0^1 \frac{x^2}{2} dx \leq I \leq \int_0^1 x^2 dx$$

$$\text{إذن } \frac{1}{6} \leq I \leq \frac{1}{3}$$

(c) خاصيات

أ- لتكن f دالة متصلة على $[a; b]$ ($a \leq b$)

إذا كانت f سالبة على $[a; b]$ فإن $\int_a^b f(x) dx \leq 0$

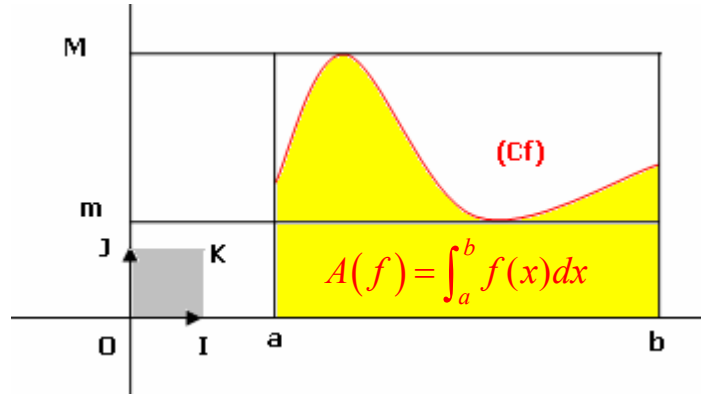
$$\left| \int_a^b f(x) dx \right| \leq \int_a^b |f(x)| dx \quad \text{ب-}$$

ج- لتكن M القيمة القصوى و m القيمة الدنيا للدالة f على $[a; b]$

$$m(b-a) \leq \int_a^b f(x) dx \leq M(b-a)$$

ملاحظة

إذا كانت f موجبة على $[a; b]$ فإن المساحة $A(f) = \int_a^b f(x) dx$ في معلم م.م محصورة بين مساحتي المستطيل الذي بعديه M و $(b-a)$ والمستطيل الذي بعديه m و $(b-a)$.



مثال

نعتبر $I = \int_1^3 \frac{1}{x\sqrt{1+x^2}} dx$ نبين أن $0 \leq I \leq \sqrt{2}$

الدالة $x \rightarrow \frac{1}{x\sqrt{1+x^2}}$ موجبة و تناقصية على $]0; +\infty[$ ومنه $\sup_{x \in [1; 3]} f(x) = f(1) = \frac{\sqrt{2}}{2}$

$$0 \leq I \leq (3-1) \frac{\sqrt{2}}{2} \quad \text{اذن}$$

2- القيمة المتوسطة لدالة متصلة في قطعة

لتكن f دالة متصلة على $[a; b]$ ($a < b$) و M القيمة القصوى و m القيمة الدنيا للدالة f على $[a; b]$

إذن $m \leq \frac{1}{b-a} \int_a^b f(x) dx \leq M$ ومنه حسب مبرهنة القيمة الوسطية يوجد على الأقل c في $[a; b]$

$$f(c) = \frac{1}{b-a} \int_a^b f(x) dx \quad \text{حيث}$$

خاصية وتعريف

لتكن f دالة متصلة على $[a; b]$ ($a \neq b$)

العدد الحقيقي $\mu = \frac{1}{b-a} \int_a^b f(x) dx$ يسمى القيمة المتوسطة للدالة f على $[a; b]$.

يوجد على الأقل c في $[a; b]$ حيث $f(c) = \frac{1}{b-a} \int_a^b f(x) dx$

ملاحظة

إذا كانت f موجبة على $[a; b]$ فإن المساحة $A(f) = \int_a^b f(x) dx$ في معلم م.م هي مساحة المستطيل الذي بعده $(b-a)$ و $f(c)$.

تمرين 1- أحسب القيمة المتوسطة للدالة f على I في الحالتين التاليتين

$$I = [0;1] \quad f(x) = \frac{x^3 + 5x^2 + x + 3}{x+1} \quad (b \quad ; \quad I = [-1;0] \quad f(x) = (x-1)e^x \quad (a$$

2- أطر الدالة f على $[0;1]$ حيث $f(x) = \arctan x$

الجواب عن السؤال 2 لدينا f قابلة للاشتقاق على $[0;1]$ و $f'(x) = \frac{1}{1+x^2}$ $\forall x \in [0;1]$ و منه

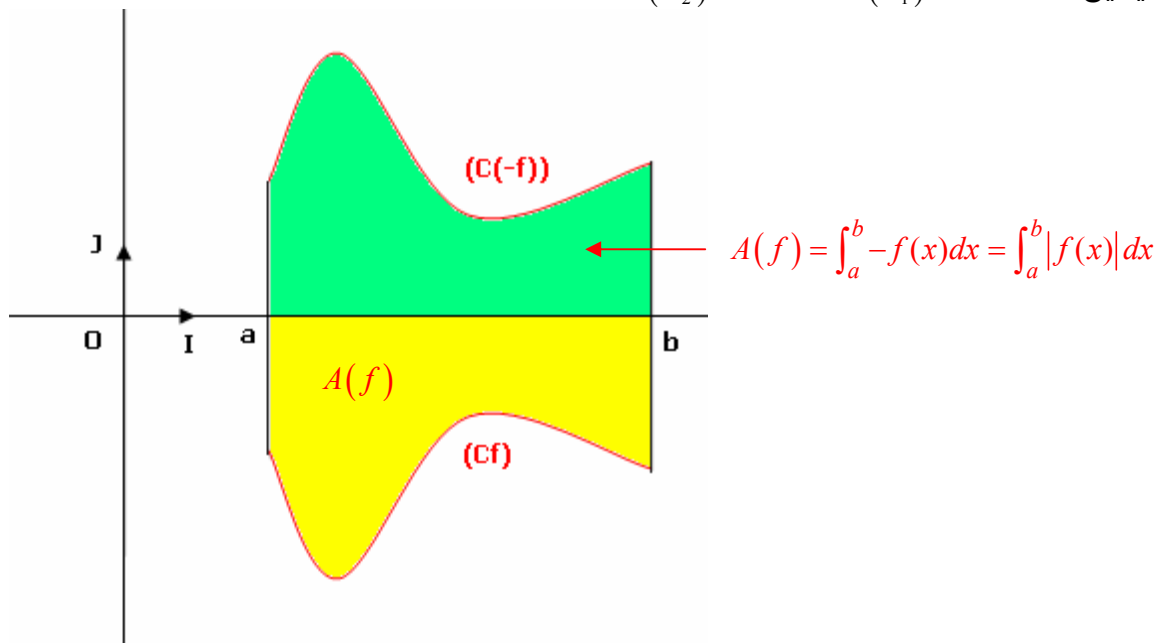
$$\frac{x}{2} \leq f(x) \leq x \quad \forall x \in [0;1] \quad \int_0^x \frac{1}{2} dt \leq \int_0^x f'(t) dt \leq \int_0^x 1 dt \quad \text{اذن} \quad \forall x \in [0;1] \quad \frac{1}{2} \leq f'(x) \leq 1$$

IV- حساب المساحات

1- حساب المساحات الهندسية

المستوى منسوب إلى م.م.م $(o; \vec{i}; \vec{j})$

لتكن f دالة متصلة على $[a; b]$ و C_f منحناها و $\Delta(f)$ الحيز المحصور بين C_f و محور الأفصيل و المستقيمين $(\Delta_1): x = a$ $(\Delta_2): x = b$



* إذا كانت f موجبة على $[a; b]$ فإن مساحة $\Delta(f)$ هي $\int_a^b f(x) dx$ بوحدة قياس المساحات

* إذا كان كانت f سالبة على $[a; b]$ مساحة هي مساحة $\Delta(-f)$

$$A(f) = \int_a^b -f(x) dx = \int_a^b |f(x)| dx$$

* إذا كانت f تغير إشارتها على $[a; b]$ مثلاً يوجد c من $[a; b]$ حيث f موجبة على $[a; c]$ و سالبة على $[c; b]$

الحيز $\Delta(f)$ على $[a; b]$ هو اتحاد $\Delta(f)$ على $[a; c]$ و $\Delta(f)$ على $[c; b]$

$$A(f) = \int_a^c f(x) dx + \int_c^b -f(x) dx = \int_a^c |f(x)| dx + \int_c^b |f(x)| dx = \int_a^b |f(x)| dx$$

خاصية

المستوى منسوب إلى م.م.م $(o; \vec{i}; \vec{j})$

لتكن f دالة متصلة على $[a; b]$ و C_f منحناها و $\Delta(f)$ الحيز المحصور بين C_f و محور الأفصيل

والمستقيمين $(\Delta_2): x = b$ $(\Delta_1): x = a$

مساحة الحيز $\Delta(f)$ هو $\int_a^b |f(x)| dx$ بوحدة قياس المساحة

اصطلاحات

العدد الموجب $\int_a^b |f(x)| dx$ يسمى المساحة الهندسية للحيز $\Delta(f)$.

العدد الحقيقي $\int_a^b f(x) dx$ يسمى المساحة الجبرية للحيز $\Delta(f)$.

مثال

نعتبر $f(x) = x^3 - 1$

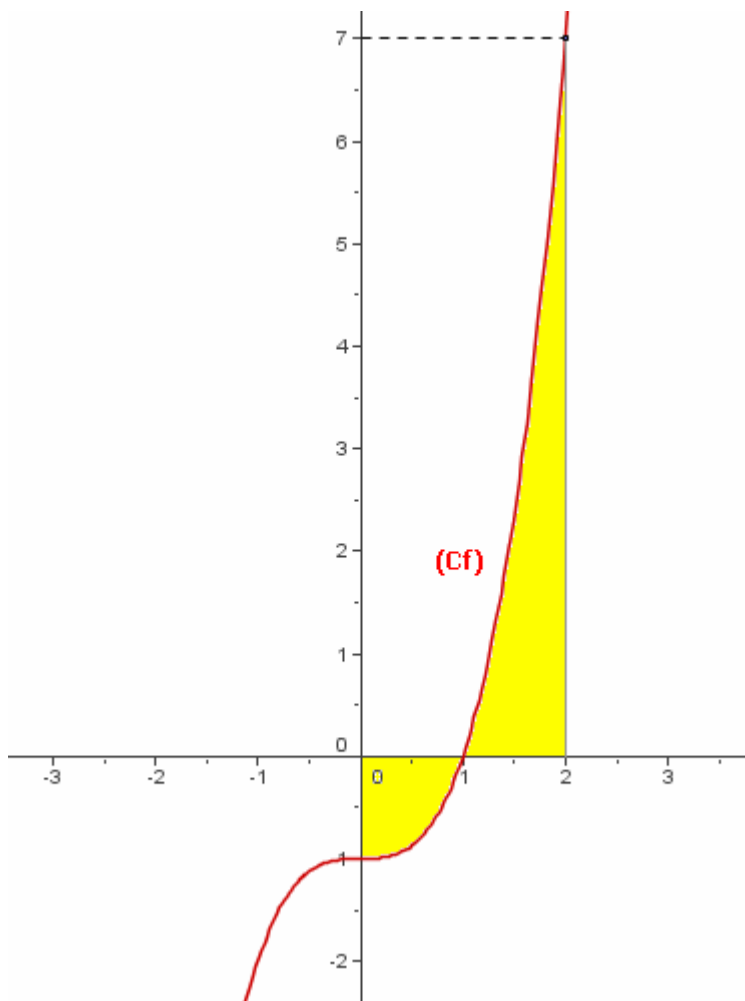
حدد مساحة الحيز المحصور بين المنحنى C_f و محور الأفاصيل و المستقيمين ذا المعادلتين

$$x = 2 \quad ; \quad x = 0$$

$$A = \int_0^2 |f(x)| dx$$

$$A = \int_0^1 (1 - x^3) dx + \int_1^2 (x^3 - 1) dx$$

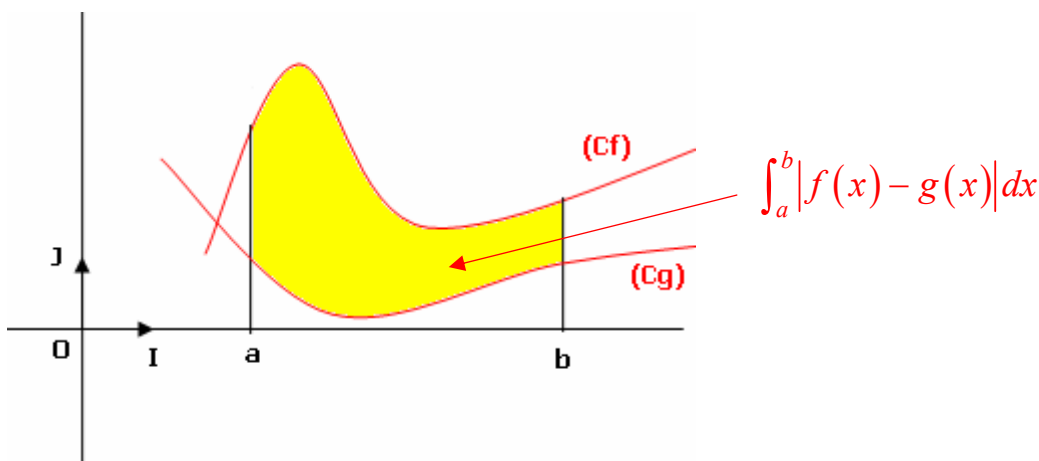
$$A = \frac{7}{2} u \quad (u = \|\vec{i}\| \times \|\vec{j}\|)$$



-2 مساحة حيز محصور بين منحنيين

لتكن f و g دالتين متصلتين على $[a; b]$

و Δ هو الحيز المحصور بين C_g و C_f و المستقيمين $(\Delta_2): x = b$ $(\Delta_1): x = a$ في م.م.م $(o; \vec{i}; \vec{j})$



إذا كان $f \geq g \geq 0$ فإن $A(\Delta) = A(f) - A(g)$

$$A(\Delta) = \int_a^b f(x) dx - \int_a^b g(x) dx = \int_a^b (f(x) - g(x)) dx = \int_a^b |f(x) - g(x)| dx$$

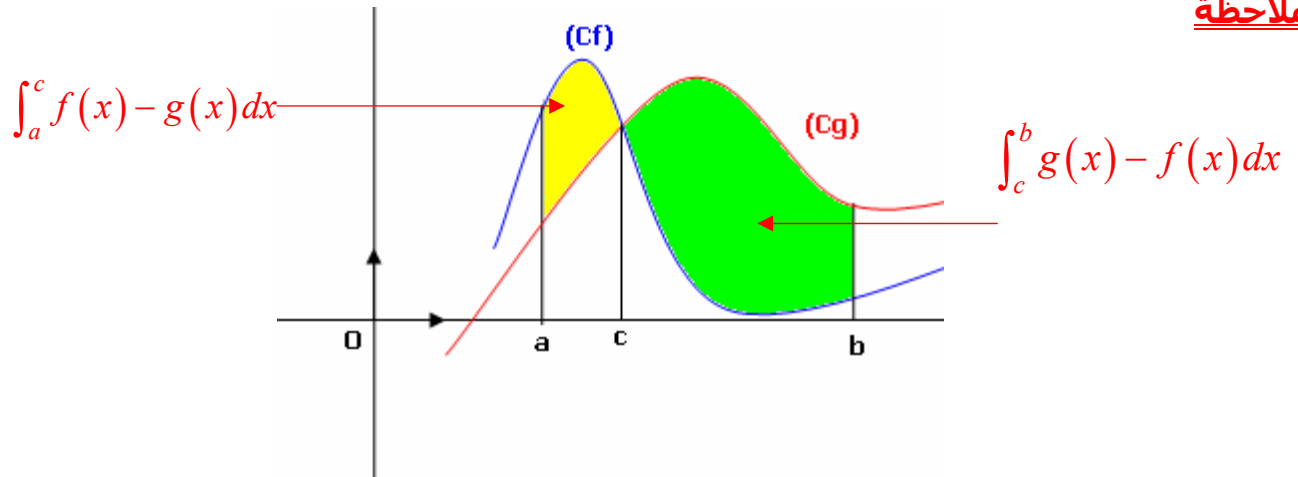
إذا كانت $f \leq g$ و كيفما كانت إشارتي f و g و يأتباع نفس الطريقة نحصل على أن

$$A(\Delta) = \int_a^b |f(x) - g(x)| dx$$

خاصية

لتكن f و g دالتين متصلتين على $[a; b]$
مساحة الحيز Δ المحصور بين C_g و C_f والمستقيمين $(\Delta_1): x = a$ و $(\Delta_2): x = b$
هي $A(\Delta) = \int_a^b |f(x) - g(x)| dx$ وحدة قياس المساحات

ملاحظة



$$A(\Delta) = \int_a^c (f(x) - g(x)) dx + \int_c^b (g(x) - f(x)) dx$$

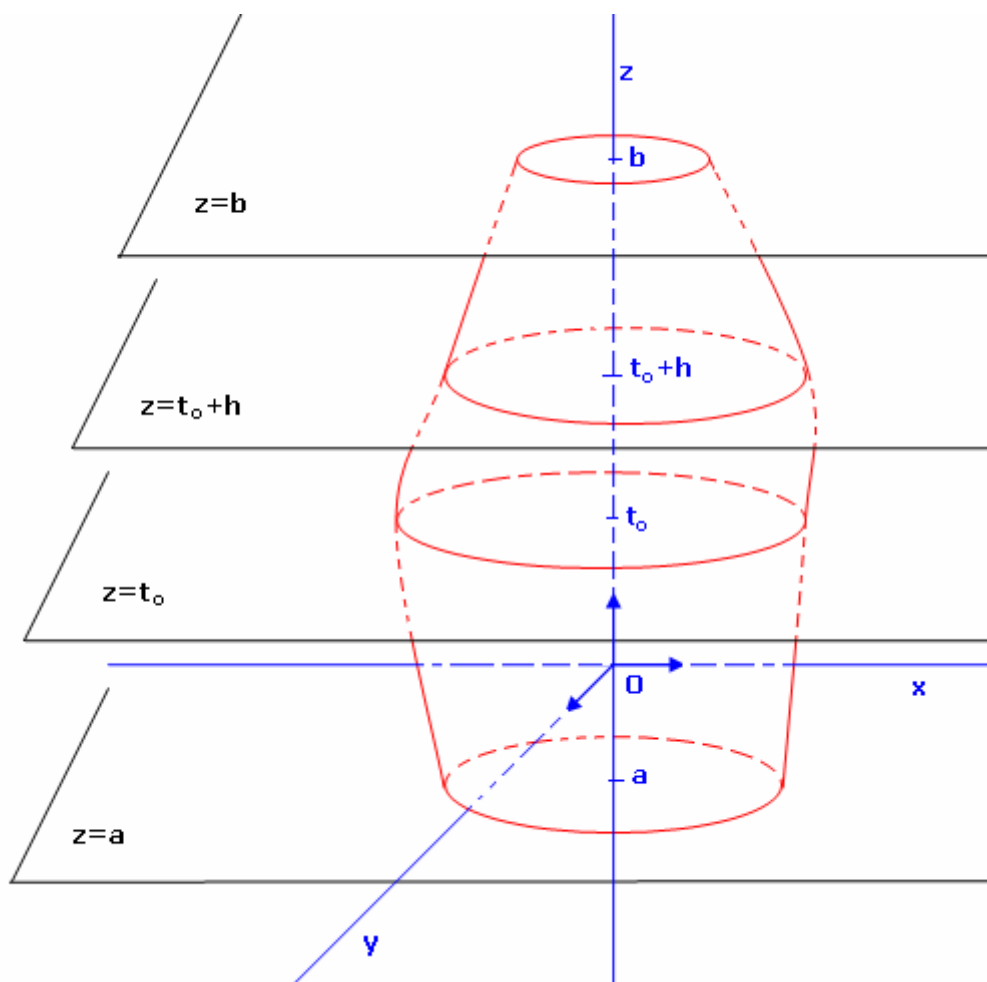
V- حساب الحجم في الفضاء

الفضاء منسوب إلى معلم م.م $(o; \vec{i}; \vec{j}; \vec{k})$ نفترض أن وحدة قياس الحجم هي حجم المكعب الذي طول حرفه

$\|\vec{i}\|$

1- حجم محسم في الفضاء

ليكن S مجسما محصورا بين المستويين المعرفين بالمعادلتين $z = a$ و $z = b$
نرمز بـ $S(t)$ إلى مساحة مجموعة النقط $M(x; y; z)$ من S حيث $z = t$ و بالرمز $V(t)$ إلى حجم مجموعة النقط من S المحصور بين المستويين $z = a$; $z = t$
ليكن t_0 من $[a; b]$ و h عددا موجبا حيث $t_0 + h \in [a; b]$



حجم مجموعة النقط $M(x; y; z)$ من S المحصورة بين $z = t_0$ و $z = t_0 + h$ هو $V(t_0 + h) - V(t_0)$ ومن جهة ثانية هذا الحجم محصور بين حجمي الأسطوانتين التي ارتفاعهما h و مساحتا قاعدتيهما على التوالي $S(t_0)$ و $S(t_0 + h)$

إذا افترضنا أن $S(t_0) \leq S(t_0 + h)$ فإن $h \cdot S(t_0) \leq V(t_0 + h) - V(t_0) \leq h \cdot S(t_0 + h)$

$$\text{و منه } S(t_0) \leq \frac{V(t_0 + h) - V(t_0)}{h} \leq S(t_0 + h)$$

و إذا افترضنا أن التطبيق $t \rightarrow S(t)$ متصل على $[a; b]$ فإن $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{V(t_0 + h) - V(t_0)}{h} = S(t_0)$

إذن الدالة $t \rightarrow V(t)$ قابلة للاشتقاق على $[a; b]$ و $V'(t) = S(t)$ $\forall t \in [a; b]$

أي أن الدالة $t \rightarrow V(t)$ دالة أصلية للدالة $t \rightarrow S(t)$ على $[a; b]$

و بما أن $V(a) = 0$ فإن $V(t) = \int_a^t S(x) dx$ $\forall t \in [a; b]$

إذن حجم المجسم S هو $V = V(b) = \int_a^b S(x) dx$ وحدة قياس الحجم .

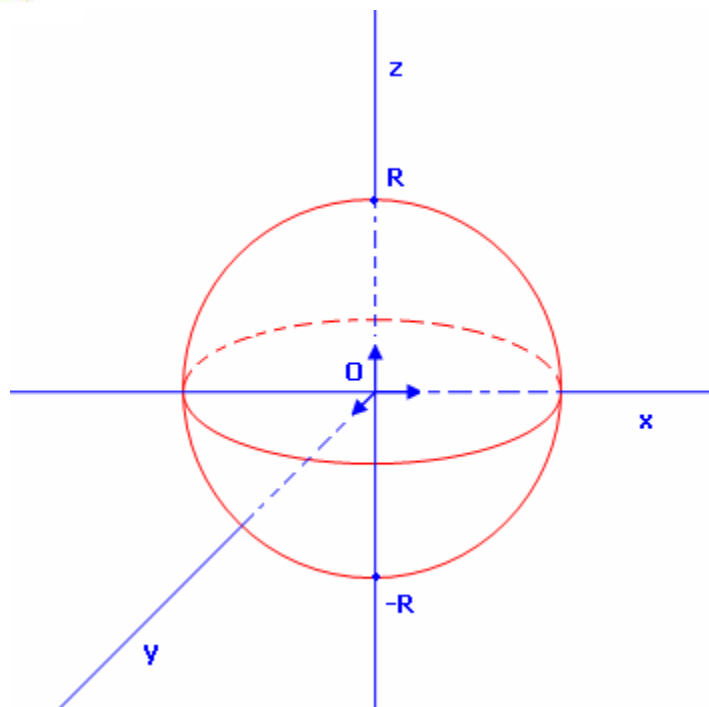
خاصية

الفضاء منسوب إلى معلم م.م

ليكن S مجسما محصورا بين المستويين المعرفين بالمعادلتين $z = a$ و $z = b$

نرمز بـ $S(t)$ الى مساحة مجموعة النقط $M(x; y; z)$ من S حيث $z = t$

إذا كان أن التطبيق $t \rightarrow S(t)$ متصلا على $[a; b]$ فإن حجم المجسم S هو $V = \int_a^b S(z) dz$ وحدة قياس الحجم.



تمرين

أحسب حجم الفلكة التي مركزها O و شعاعها R
 الحل : نفترض أن الفضاء منسوب م.م.م أصله O .
 الفلكة محصورة بين المستويين المعرفين على التوالي
 بالمعادلتين $z = -R$; $z = R$

مجموعة النقط $M(x; y; z)$ من الفلكة حيث $z = t$

$-R \leq t \leq R$ هي قرص شعاعه $\sqrt{R^2 - t^2}$

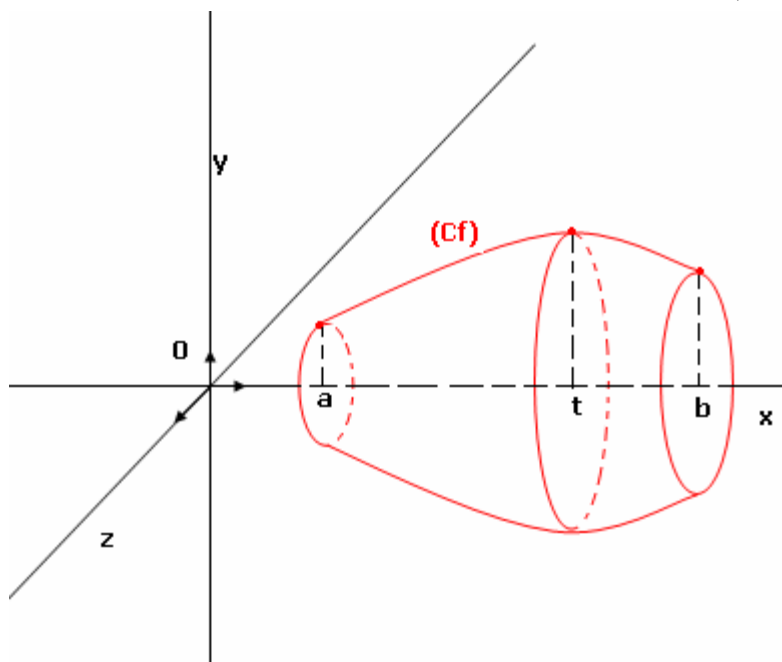
و مساحته $S(t) = \pi(R^2 - t^2)$

بما أن التطبيق $t \rightarrow \pi(R^2 - t^2)$ متصل على $[-R; R]$

$$V = \int_{-R}^R \pi(R^2 - t^2) dt = \frac{4}{3} \pi R^3 \text{ فان}$$

2- حجم مجسم الدوران

لتكن f دالة متصلة على $[a; b]$ و C_f منحنىها في م.م.م $(O; \vec{i}; \vec{j})$
 إذا دار C_f حول المحور $(O; \vec{i})$ دورة كاملة فانه يولد مجسما يسمى مجسم الدوران



في هذه الحالة لدينا مجموعة النقط $M(x; y; z)$ من الجسم بحيث $x = t$ هي قرص مساحته

$$S(t) = \pi f^2(t)$$

التطبيق $t \rightarrow \pi f^2(t)$ متصل على $[a; b]$

إذن حجم المجسم الدوراني هو $V = \int_a^b \pi f^2(t) dt$

خاصية

الفضاء منسوب إلى م.م.م أصله O , و f دالة متصلة على $[a; b]$

حجم مجسم الدوران المولد عن دوران المنحنى C_f حول المحور (OX) هو $V = \int_a^b \pi f^2(t) dt$
 بوحدة قياس الحجم .

$$f(x) = \frac{1}{2}x \ln x \text{ نعتبر}$$

أنشئ C_f و حدد حجم مجسم الدوران الذي يولده دوران المنحنى C_f حول المحور (OX) في المجال $[1; e]$

تمارين و حلول

تمرين 1

1- أ / تأكد أن $\frac{1}{t} - \frac{1}{t+2} = \frac{1}{t(t+2)}$

ب / أحسب $\int_1^2 \frac{dt}{t(t+2)}$

2- أحسب $\int_0^{\frac{\pi}{2}} e^x \sin x dx$

3- نضع $J = \int_0^{\frac{\pi}{2}} x^2 \sin^2 x dx$; $I = \int_0^{\frac{\pi}{2}} x^2 \cos^2 x dx$

أحسب $I + J$ و $I - J$ ثم استنتج I و J

1- أ / تأكد أن $\frac{1}{t} - \frac{1}{t+2} = \frac{1}{t(t+2)}$

$\frac{1}{t} - \frac{1}{t+2} = \frac{t+2-t}{t(t+2)} = \frac{1}{t(t+2)}$

ب / نحسب $\int_1^2 \frac{dt}{t(t+2)}$

$\int_1^2 \frac{1}{t(t+2)} dt = \int_1^2 \frac{1}{t} - \frac{1}{t+2} dt = [\ln t - \ln(t+2)]_1^2 = \ln 2 - \ln 4 + \ln 3 = \ln \frac{3}{2}$

2- نحسب $A = \int_0^{\frac{\pi}{2}} e^x \sin x dx$

$A = \left[e^x \sin x \right]_0^{\frac{\pi}{2}} - \int_0^{\frac{\pi}{2}} e^x \cos x dx = \left[e^x \sin x \right]_0^{\frac{\pi}{2}} - \left[e^x \cos x \right]_0^{\frac{\pi}{2}} - K$

$A = \frac{1}{2} \left(\left[e^x \sin x \right]_0^{\frac{\pi}{2}} - \left[e^x \cos x \right]_0^{\frac{\pi}{2}} \right) = \dots\dots\dots$

3- نضع $J = \int_0^{\frac{\pi}{2}} x^2 \sin^2 x dx$; $I = \int_0^{\frac{\pi}{2}} x^2 \cos^2 x dx$

نحسب $I + J$

$J + I = \int_0^{\frac{\pi}{2}} x^2 \sin^2 x dx + \int_0^{\frac{\pi}{2}} x^2 \cos^2 x dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} x^2 (\cos^2 x + \sin^2 x) dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} x^2 dx = \left[\frac{1}{3} x^3 \right]_0^{\frac{\pi}{2}} = \frac{\pi^3}{24}$

نحسب $I - J$

$$I - J = \int_0^{\frac{\pi}{2}} x^2 \cos^2 x dx - \int_0^{\frac{\pi}{2}} x^2 \sin^2 x dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} x^2 (\cos^2 x - \sin^2 x) dx$$

$$I - J = \int_0^{\frac{\pi}{2}} x^2 \cos 2x dx = \left[x^2 \frac{\sin 2x}{2} \right]_0^{\frac{\pi}{2}} - \int_0^{\frac{\pi}{2}} x \sin 2x dx$$

$$I - J = \left[x^2 \frac{\sin 2x}{2} \right]_0^{\frac{\pi}{2}} - \left[-x \frac{\cos 2x}{2} \right]_0^{\frac{\pi}{2}} + \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos 2x}{2} dx$$

$$I - J = \frac{-\pi}{4} \quad \text{اذن} \quad I - J = \left[x^2 \frac{\sin 2x}{2} \right]_0^{\frac{\pi}{2}} - \left[-x \frac{\cos 2x}{2} \right]_0^{\frac{\pi}{2}} + \left[-\frac{\sin 2x}{4} \right]_0^{\frac{\pi}{2}}$$

نستنتج I و J

$$J = \frac{\pi^3}{48} + \frac{\pi}{8} \quad \text{و} \quad I = \frac{\pi^3}{48} - \frac{\pi}{8} \quad \text{ومنه} \quad I + J = \frac{\pi^3}{24} \quad \text{و} \quad I - J = \frac{-\pi}{4}$$

لدينا

تمرين 2

نعتبر الدالة f المعرفة على \mathbb{R} بـ $f(x) = e^x (1 - e^x)$

1- حدد $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x}$; $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$; $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x)$

2- أحسب $f'(x)$ وأعط جدول تغيرات f وأنشئ C_f

3- حدد المساحة A_k المحصور بين C_f و محور الأفصيل و المستقيمين المعرفين

بالمعادلتين $x = 0$; $x = k$ حيث k عدد حقيقي سالب (يمكن اعتبار $t = e^x$)

4- حدد $\lim_{k \rightarrow -\infty} A_k$

$$f(x) = e^x (1 - e^x)$$

4- نحدد $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x}$; $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$; $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x)$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} e^x (1 - e^x) = 0 ; \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} e^x (1 - e^x) = -\infty$$

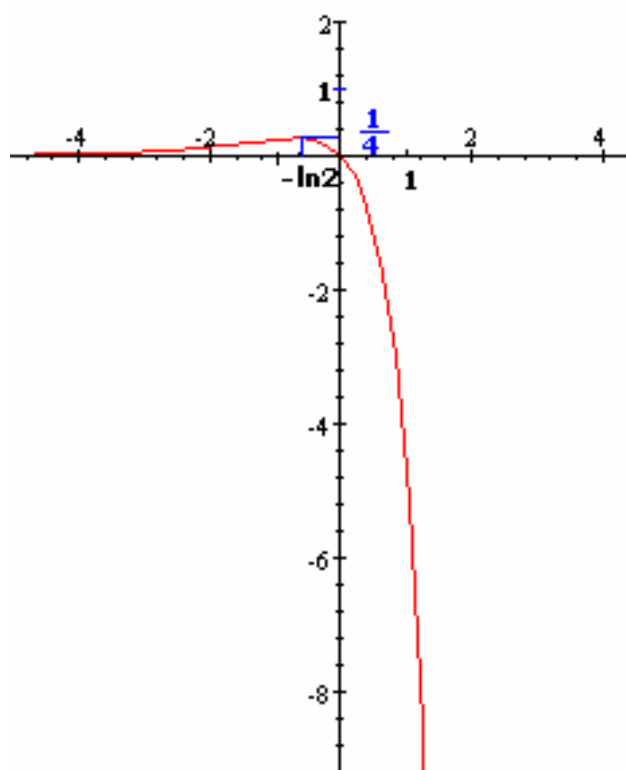
$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{e^x}{x} (1 - e^x) = -\infty ;$$

5- أنسب $f'(x)$ و نعطي جدول تغيرات f وأنشئ C_f

$$f'(x) = [e^x - e^{2x}]' = e^x - 2e^{2x} = e^x (1 - 2e^x)$$

جدول التغيرات

x	$-\infty$	$-\ln 2$	$+\infty$
$f'(x)$	+	0	-
f	0	$\frac{1}{4}$	$-\infty$



6- نحدد المساحة A_k

$$A_k = \int_k^0 f(x) dx = \int_k^0 e^x - e^{2x} dx$$

$$A_k = \left[e^x - \frac{1}{2} e^{2x} \right]_k^0 = \frac{1}{2} - e^k + \frac{1}{2} e^{2k}$$

4- حدد $\lim_{k \rightarrow -\infty} A_k$

$$\lim_{k \rightarrow -\infty} A_k = \lim_{k \rightarrow -\infty} \frac{1}{2} - e^k + \frac{1}{2} e^{2k} = \frac{1}{2}$$

تمرين 1

$$\forall x \in \mathbb{R} - \{-1; 3\} \quad \frac{-3x^2 + 7x + 2}{x^2 - 2x - 3} = a + \frac{b}{x+1} + \frac{c}{x-3} \quad \text{حيث } a ; b ; c \text{ حدد}$$

$$\int_0^2 \frac{-3x^2 + 7x + 2}{x^2 - 2x - 3} dx \quad \text{أحسب}$$

$$2- \text{أحسب} \quad \int_0^1 \frac{x^4 + x^2 + 3}{x^2 + 1} dx \quad \text{و} \quad \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^4 x dx$$

$$3- \text{بين أن} \quad \forall x \in \mathbb{R} \quad \frac{e^{2x} - 1}{e^{2x} + 1} = \frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}}$$

$$\int_0^x \frac{e^{2t} - 1}{e^{2t} + 1} dt \quad \text{أحسب}$$

تمرين 2

$$1- \text{باستعمال المكاملة بالأجزاء أحسب} \quad \int_0^{\ln 2} (x+2)e^{2x} dx \quad \int_0^1 x^2 \ln(x^2+1) dx \quad ; \quad \int_0^{\frac{\pi}{2}} x \sin x dx$$

$$\text{و} \quad \int_0^{\pi} e^x \sin x dx$$

$$2- \text{حدد الدالة الأصلية لـ } x \rightarrow \sin^3 x \text{ التي تنعدم في } 0 \text{ على } \mathbb{R} \text{ ثم أحسب} \quad \int_0^{\frac{\pi}{2}} x \sin^3 x dx$$

تمرين 3

$$\text{نعتبر} \quad I_n = \int_0^1 x^n e^x dx$$

$$1- \text{أحسب} \quad I_1$$

$$2- \text{بين} \quad \forall n \in \mathbb{N}^* \quad I_{n+1} = e - (n+1)I_n \quad \text{باستعمال المكاملة بالأجزاء.}$$

$$3- \text{أحسب} \quad I_2 \quad I_3$$

$$4- \text{أستنتج} \quad \int_0^1 (x^3 + 2x^2 - 2x) e^x dx$$

تمرين 4

$$1- \text{بين أن} \quad \forall x \in \mathbb{R}^+ \quad 1 - x \leq \frac{1}{1+x} \leq 1$$

$$2- \text{استنتج} \quad \forall x \in \mathbb{R}^+ \quad x - \frac{x^2}{2} \leq \ln(1+x) \leq x$$

$$3- \text{استنتج تأطيرا لـ} \quad \int_0^1 \ln(1+x^2) dx \quad \text{إلى } 0,1.$$

تمرين 9

$$1- \text{تحقق أن} \quad \forall x \in \mathbb{R}^* \quad \frac{2}{x(x^2+1)} = \frac{2}{x} - \frac{2x}{x^2+1}$$

$$2- \text{نعتبر} \quad k \in [0;1].$$

$$\text{باستعمال المكاملة بالأجزاء أحسب} \quad A_k = \int_k^1 \frac{2x \ln x}{(x^2+1)^2} dx$$

$$\text{حدد} \quad \lim A_k$$

تمرين 10

1- أ- تأكد أن $\frac{t^2 - t + 1}{t(t^2 + 1)} = \frac{1}{t} - \frac{1}{t^2 + 1}$

ب- أحسب $\int_1^{\sqrt{3}} \frac{t^2 - t + 1}{t(t^2 + 1)} dt$

2- أحسب $\int_0^1 (3x^2 + 2x + 1) \ln(x + 1) dx$ باستعمال المكاملة بالأجزاء

تمرين 11

1- تأكد أن $\forall x \in \mathbb{R}^* \quad \frac{1}{x(x^2 + 1)} = \frac{1}{x} - \frac{x}{x^2 + 1}$

2- أحسب $I(\alpha) = \int_{\alpha}^1 \frac{x \ln x}{(x^2 + 1)^2} dx$ باستعمال المكاملة بالأجزاء حيث $\alpha \in]0; 1[$

3- أحسب $\lim_{\alpha \rightarrow 0^+} I(\alpha)$

تمرين 12

نعتبر $n \in \mathbb{N}^*$ و $I_0 = \int_0^{\frac{\pi}{3}} \frac{1}{\cos x} dx$; $I_n = \int_0^{\frac{\pi}{3}} \frac{(\sin x)^n}{\cos x} dx$

1- أحسب I_1 واستنتج I_3 ; I_5

2- أحسب $\int_0^{\frac{\pi}{3}} (\sin x)^n \cos x dx$ واستنتج $I_{n+2} - I_n$ بدلالة n .

3- أ- بين أن الدالة $x \rightarrow \ln \left[\operatorname{tg} \left(\frac{x}{2} + \frac{\pi}{4} \right) \right]$ دالة أصلية للدالة $x \rightarrow \frac{1}{\cos x}$ على $\left[0; \frac{\pi}{3} \right]$

ب- استنتج I_0 ثم I_2 ; I_4

المعادلات التفاضلية

I- تقديم

1- تؤدي دراسة بعض الظواهر الفيزيائية و البيولوجية و الاقتصادية و غيرها إلى معادلات يكون فيها

المجهول دالة و تحتوي على مشتقة أو مشتقات هذه الدالة.

هذا النوع من المعادلات يسمى المعادلات التفاضلية.

يرمز عادة إلى الدالة المجهولة بالرمز y (وقد يرمز لها بأي حرف آخر مثل u, z, f, \dots)
حل المعادلة التفاضلية يعني إيجاد جميع الدوال y التي تحقق هذه المعادلة , و مجموعة هذه الدوال
تسمى الحل العام للمعادلة , كل عنصر من هذه المجموعة يسمى حلا خاصا للمعادلة , كل حل
يسمى كذلك تكاملا.

2- أمثلة

(أ) $y' = 0$ هي معادلة تفاضلية

الدالة y المعرفة على \mathbb{R} بـ $y(x) = 1$ حل خاص للمعادلة

مجموعة الدوال الثابتة على \mathbb{R} هي الحل العام للمعادلة $y' = 0$.

(ب) $y' = x^2 - 1$ هي معادلة تفاضلية ذات المجهول y (يمكن أن نكتب $y'(x) = x^2 - 1$)

حلول هذه المعادلة هي الدوال الأصلية للدالة $x \rightarrow x^2 - 1$ على \mathbb{R} .

أي الحل العام لهذه المعادلة هي مجموعة الدوال المعرفة على \mathbb{R} بما يلي $x \rightarrow \frac{1}{3}x^3 - x + k$

حيث k عدد حقيقي اعتباطي .

II - حل المعادلة التفاضلية $y' = ay + b$

1/ المعادلة التفاضلية $y' = ay$

* إذا كان $a = 0$ فإن $y' = 0$ أي أن الحل العام هو مجموعة الدوال الثابتة على \mathbb{R}

* إذا كان $a \neq 0$

نعلم أن $(e^{ax})' = ae^{ax}$ $\forall x \in \mathbb{R}$ اذن $x \rightarrow e^{ax}$ حل خاص للمعادلة $y' + ay = 0$

ليكن y حلا اعتباطيا للمعادلة $y' + ay = 0$ نضع $y(x) = z(x)e^{ax}$

ومنه $y'(x) = z'(x)e^{ax} + az(x)e^{ax}$

أي $y'(x) = z'(x)e^{ax} + ay(x)$ و بالتالي $y'(x) - ay(x) = z'(x)e^{ax} = 0$

ومنه $z'(x) = 0$ و بالتالي $z(x) = \lambda$ $\forall x \in \mathbb{R}$ حيث λ عدد حقيقي اعتباطي

اذن $y(x) = \lambda e^{ax}$ $\forall x \in \mathbb{R}$ حيث λ عدد حقيقي اعتباطي

نلاحظ أن الحالة $a = 0$ هي ضمن الحالة العامة .

خاصية

المعادلة التفاضلية $y' = ay$ تقبل ما لانهاية من الحلول و هي الدوال المعرفة على \mathbb{R} بـ $x \rightarrow \lambda e^{ax}$ حيث λ عدد حقيقي اعتباطي.

نتيجة

يوجد حل وحيد للمعادلة $y' = ay$ يحقق الشرط $y(x_0) = y_0$ و هي الدالة $x \rightarrow y_0 e^{a(x-x_0)}$

الشرط $y(x_0) = y_0$ يسمى الشرط البدئي

أمثلة

1- نحل المعادلة التفاضلية $y' = 2y$

حلول المعادلة التفاضلية $y' = 2y$ هي الدوال المعرفة على \mathbb{R} بـ حيث $x \rightarrow \lambda e^{2x}$ حيث λ عدد حقيقي اعتباطي.

$$-2 \text{ نحل المعادلة التفاضلية } y' = \frac{1}{3}y \text{ ; } y(1) = 2$$

$$\text{حل المعادلة التفاضلية } y' = \frac{1}{3}y \text{ ; } y(1) = 2 \text{ هي الدالة المعرفة على } \mathbb{R} \text{ بـ حيث } x \rightarrow 2e^{\frac{1}{3}(x-1)}$$

2/ حل المعادلة التفاضلية $y' = ay + b$

إذا كان $a = 0$ فإن $y' = b$ ومنه حلول المعادلة التفاضلية هي الدوال f حيث $f(x) = bx + c$

$$\text{إذا كان } a \neq 0 \text{ فإن } y' = ay + b \Leftrightarrow y' = a\left(y + \frac{b}{a}\right)$$

$$\text{نضع } z = y + \frac{b}{a} \text{ ومنه } z' = y'$$

$$y' = ay + b \Leftrightarrow z' = az$$

$$\Leftrightarrow z(x) = \lambda e^{ax} \quad / \lambda \in \mathbb{R}$$

$$\Leftrightarrow y(x) + \frac{b}{a} = \lambda e^{ax} \quad / \lambda \in \mathbb{R} \text{ وبالتالي}$$

$$\Leftrightarrow y(x) = \lambda e^{ax} - \frac{b}{a} \quad / \lambda \in \mathbb{R}$$

خاصية

ليكن a و b عددين حقيقيين حيث $a \neq 0$
المعادلة التفاضلية $y' = ay + b$ تقبل ما لانهاية من الحلول و هي الدوال المعرفة على \mathbb{R} بـ $x \rightarrow \lambda e^{ax} - \frac{b}{a}$ حيث λ عدد حقيقي اعتباطي.

نتيجة

يوجد حل وحيد للمعادلة $y' = ay + b$ يحقق الشرط $y(x_0) = y_0$ و هي الدالة $x \rightarrow \left(y_0 + \frac{b}{a}\right)e^{a(x-x_0)} - \frac{b}{a}$

الشرط $y(x_0) = y_0$ يسمى الشرط البدئي

مثال

$$\text{نحل المعادلة التفاضلية } y' = -3y + 2$$

حلول المعادلة التفاضلية $y' = -3y + 2$ هي الدوال المعرفة على \mathbb{R} بـ حيث $x \rightarrow \lambda e^{-3x} + \frac{2}{3}$ حيث λ عدد حقيقي اعتباطي.

III- حل المعادلات التفاضلية $y'' + ay' + by = 0$

1- المعادلات التفاضلية $y'' + ay' + by = 0$ حيث $(a, b) \in \mathbb{R}^2$ تسمى معادلات تفاضلية خطية من الرتبة

الثانية ذات المعاملات الثابتة

2- بعض الحالات الخاصة

$$* - \text{ إذا كان } a = b = 0 \text{ فإن } y'' = 0$$

$$y'' = 0 \Leftrightarrow \exists k \in \mathbb{R} \quad y'(x) = k \Leftrightarrow \exists (k; k') \in \mathbb{R}^2 \quad y(x) = kx + k'$$

الحل العام للمعادلة $y'' = 0$ هي مجموعة الدوال $x \rightarrow kx + k'$ بحيث $(k; k') \in \mathbb{R}^2$

$$* - \text{ إذا كان } b = 0 \text{ فإن } y'' + ay' = 0$$

$$\Leftrightarrow (y')' + ay' = 0 \text{ ومنه } y' \text{ حل للمعادلة } z' + az = 0$$

$$\text{و بالتالي } y'(x) = \lambda e^{-ax} \text{ بحيث } \lambda \text{ عدد حقيقي اعتباطي}$$

اذن الحل العام للمعادلة $y'' + ay' = 0$ هي الدوال الأصلية $x \rightarrow \lambda e^{-ax}$

$$\text{أي الدوال } x \rightarrow \frac{-\lambda}{a} e^{-ax} + \mu \quad (\lambda; \mu) \in \mathbb{R}^2$$

3 - حل المعادلة التفاضلية $y'' + ay' + by = 0$; $E : (a; b) \neq (0; 0)$

(a)- تذكير

لتكن f و g دالتين معرفتين على نفس المجال I
تكون f و g متناسبتين اذا و فقط اذا كان $\exists k \in \mathbb{R} \quad \forall x \in I \quad g(x) = kf(x)$

(b) ليكن y_1 و y_2 حلين للمعادلة E وليكن $(\alpha; \beta) \in \mathbb{R}^2$ بين أن $\alpha y_1 + \beta y_2$ حل للمعادلة E

خاصية

اذا كان y_1 و y_2 حلين للمعادلة $y'' + ay' + by = 0$: E و كان $(\alpha; \beta) \in \mathbb{R}^2$ فان $\alpha y_1 + \beta y_2$ حل للمعادلة E .

خاصية

كل حل للمعادلة التفاضلية $y'' + ay' + by = 0$: E هو تأليفة خطية لحلين غير متناسبين للمعادلة E .

ملاحظة لايجاد حل العام للمعادلة التفاضلية $y'' + ay' + by = 0$: E يكفي أن نجد حلين خاصين غير متناسبين

(d)- حل المعادلة التفاضلية $y'' + ay' + by = 0$: E ; $(a; b) \in \mathbb{R}^2$

لنبحث عن حلول من نوع $y : x \rightarrow e^{rx}$; $r \in \mathbb{R}$

$$y \text{ حل للمعادلة } E \Leftrightarrow r^2 e^x + a r e^x + b e^x = 0 \Leftrightarrow r^2 + ar + b = 0$$

اذن اذا كان r حل للمعادلة $r^2 + ar + b = 0$ فان الدالة $x \rightarrow e^{rx}$ حل للمعادلة E

خاصية

المعادلة $r^2 + ar + b = 0$ تسمى المعادلة المميزة للمعادلة التفاضلية $y'' + ay' + by = 0$: E ; $(a; b) \in \mathbb{R}^2$
مميز هذه المعادلة هو $a^2 - 4b$

الحالة 1 اذا كان $a^2 - 4b > 0$ فان $r^2 + ar + b = 0$ تقبل حلين مختلفين r_1 و r_2 .

الدالتان $x \rightarrow e^{r_1 x}$; $x \rightarrow e^{r_2 x}$ حلان خاصان للمعادلة التفاضلية E

نلاحظ أن $x \rightarrow e^{r_1 x}$; $x \rightarrow e^{r_2 x}$ غير متناسبين

اذن حلول المعادلة E هي الدوال $x \rightarrow \alpha e^{r_1 x} + \beta e^{r_2 x}$ حيث α و β عدنان اعتباطيان.

الحالة 2 اذا كان $a^2 - 4b = 0$ فان $r^2 + ar + b = 0$ تقبل حل مزدوج r .

الدالة $x \rightarrow e^{rx}$ حل للمعادلة E . نبين أن $x \rightarrow x e^{rx}$ حل للمعادلة E .

الدالتان $x \rightarrow e^{rx}$ و $x \rightarrow x e^{rx}$ غير متناسبتين لأن $x \rightarrow x \frac{e^{rx}}{e^{rx}}$ غير ثابتة.

اذن حلول المعادلة E هي الدوال $x \rightarrow (\alpha + \beta x) e^{rx}$ حيث α و β عدنان اعتباطيان

الحالة 3 اذا كان $a^2 - 4b < 0$ فان $r^2 + ar + b = 0$ تقبل جذرين مترافقين $r_1 = p + iq$ و $r_2 = p - iq$ ($q \neq 0$)

$$e^{r_1 x} = e^{px} (\cos qx + i \sin qx) = e^{px} \cos qx + i e^{px} \sin qx$$

نبين أن الدالتين $x \rightarrow e^{px} \cos x$; $x \rightarrow e^{px} \sin x$ حلين للمعادلة E .

$$\left(p = -\frac{a}{2} ; q = \frac{\sqrt{4b - a^2}}{2} \right) \text{ لاحظ}$$

و بما أن الدالتين $x \rightarrow e^{px} \cos x$; $x \rightarrow e^{px} \sin x$ غير متناسبتين فان حلول المعادلة التفاضلية

E هي الدوال $x \rightarrow e^{px} (\alpha \cos qx + \beta \sin qx)$ حيث α و β عدنان اعتباطيان.

خاصية

لتكن المعادلة التفاضلية $E : y'' + ay' + by = 0$; $(a; b) \in \mathbb{R}^2$ و لتكن $r^2 + ar + b = 0$ المعادلة المميزة

*- اذا كان $a^2 - 4b > 0$ فان المعادلة المميزة لها جذرين مختلفين r_1 ; r_2

و حلول المعادلة E هي الدوال $x \rightarrow \alpha e^{r_1 x} + \beta e^{r_2 x}$ حيث α و β عدنان اعتباطيان

*- اذا كان $a^2 - 4b = 0$ فان المعادلة المميزة تقبل حل مزدوج r .

و حلول المعادلة E هي الدوال $x \rightarrow (\alpha + \beta x) e^{rx}$ حيث α و β عدنان اعتباطيان

*- اذا كان $a^2 - 4b < 0$ فان المعادلة المميزة تقبل جذرين مترافقين $r_1 = p + iq$ و $r_2 = p - iq$

و حلول المعادلة التفاضلية E هي الدوال $x \rightarrow e^{px} (\alpha \cos qx + \beta \sin qx)$ حيث α و β عدنان اعتباطيان.

الحل الذي يحقق $y'(x_0) = y'_0$; $y(x_0) = y_0$

يوجد حل وحيد للمعادلة التفاضلية E يحقق الشرطين $y'(x_0) = y'_0$; $y(x_0) = y_0$ الشرطان $y'(x_0) = y'_0$; $y(x_0) = y_0$ يسميان الشرطين البدئيين . يمكن إعطاء شرطين بدئيين آخرين.

ملاحظة

لدينا $\alpha \cos qx + \beta \sin qx = k \left(\frac{\alpha}{k} \cos qx + \frac{\beta}{k} \sin qx \right) = k (\cos \varphi \cos qx + \sin \varphi \sin qx) = k \cos (qx - \varphi)$

بوضع $\cos \varphi = \frac{\alpha}{k}$; $\sin \varphi = \frac{\beta}{k}$; $k = \sqrt{\alpha^2 + \beta^2}$

تستنتج اذا كان $a^2 - 4b < 0$ فان $x \rightarrow ke^{px} \cos (qx - \varphi)$ حيث k و φ اعتباطيان

تمرين 1- حل المعادلة $y'' + 2y' - \frac{5}{4}y = 0$ و حدد الحل الخاص y_1 حيث $y_1(0) = 1$; $y_1'(0) = -1$

2- حل المعادلة $y'' + 4y' + 4y = 0$

3- حل المعادلة $y'' + 2y' + 5y = 0$

الجواب

1- ليكن Δ مميز $r^2 + 2r - \frac{5}{4} = 0$ المعادلة المميزة للمعادلة $y'' + 2y' - \frac{5}{4}y = 0$

$r_2 = \frac{-2-3}{2} = -\frac{5}{2}$ و $r_1 = \frac{-2+3}{2} = \frac{1}{2}$ ومنه $\Delta = 4 + 5 = 9$

ومنه حلول المعادلة هي الدوال $x \rightarrow \alpha e^{\frac{1}{2}x} + \beta e^{-\frac{5}{2}x}$ حيث α و β عدنان اعتباطيان

لنحدد الحل الخاص y_1 حيث $y_1(0) = 1$; $y_1'(0) = -1$

لدينا $y_1(x) = \alpha e^{\frac{1}{2}x} + \beta e^{-\frac{5}{2}x}$ ومنه $y_1'(x) = \frac{\alpha}{2} e^{\frac{1}{2}x} - \frac{5\beta}{2} e^{-\frac{5}{2}x}$

$$\begin{cases} y_1(0) = 1 \\ y_1'(0) = -1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \alpha + \beta = 1 \\ \frac{\alpha}{2} - \frac{5\beta}{2} = -1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \alpha + \beta = 1 \\ \alpha - 5\beta = -2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \alpha = \frac{1}{2} \\ \beta = \frac{1}{2} \end{cases}$$

$$y_1(x) = \frac{1}{2} \left(e^{\frac{1}{2}x} + e^{-\frac{5}{2}x} \right) \text{ اذن}$$

2- مميز $r^2 + 4r + 4 = 0$ المعادلة المميزة للمعادلة $y'' + 4y' + 4y = 0$ منعدم ومنه $r = -2$

و حلول المعادلة E هي الدوال $x \rightarrow (\alpha + \beta x)e^{-2x}$ حيث α و β عدنان اعتباطيان

3- مميز $r^2 + 2r + 5 = 0$ المعادلة المميزة للمعادلة $y'' + 2y' + 5y = 0$ هو $\Delta = 4 - 20 = -16 = (4i)^2$

ومنه $r_1 = -1 - 2i$ و $r_2 = -1 + 2i$

و حلول المعادلة E هي الدوال $x \rightarrow e^{-x} (\alpha \cos 2x + \beta \sin 2x)$ حيث α و β عدنان اعتباطيان

حالات خاصة

*- اذا كان $a > 0$ فان حلول المعادلة التفاضلية $y'' + ay = 0$ هي الدوال المعرفة على \mathbb{R} بما يلي

$x \rightarrow \alpha \cos \sqrt{a}x + \beta \sin \sqrt{a}x$ حيث $(\alpha; \beta) \in \mathbb{R}^2$.

*- اذا كان $a < 0$ فان حلول المعادلة التفاضلية $y'' + ay = 0$ هي الدوال المعرفة على \mathbb{R} بما يلي

$x \rightarrow \alpha e^{\sqrt{-a}x} + \beta e^{-\sqrt{-a}x}$ حيث $(\alpha; \beta) \in \mathbb{R}^2$.

مثال حل المعادلتين $y'' - 4y = 0$; $y'' + 2y = 0$

حلل المعادلة $y'' + 2y = 0$ هي الدوال المعرفة بـ $x \rightarrow \alpha \cos \sqrt{2}x + \beta \sin \sqrt{2}x$ حيث $(\alpha; \beta) \in \mathbb{R}^2$.
 حلول المعادلة $y'' - 4y = 0$ هي الدوال المعرفة بـ $x \rightarrow \alpha e^{2x} + \beta e^{-2x}$ حيث $(\alpha; \beta) \in \mathbb{R}^2$.

تمارين حول المعادلات التفاضلية

4	1
$f(x) = 3e^{-2x} - 4$: $y' = ay + b$	y : $y'' + \frac{1}{2}y = 0$ (1) $y'' + \frac{9}{4}y = 0$ (2) $y(0) = 1 \quad y'(0) = 1 \quad y'' + 9y = 0$ (3) $y'(\frac{\pi}{2}) = 3 \quad y(\frac{\pi}{2}) = 1 \quad y'' + 4y = 0$ (4)
6	2
$f(0) = -\frac{1}{3} \quad 3y' + y = 0 \quad f$ (1) $y'' - 2\sqrt{2}y' + 2y = 0$: g (2) $g'(0) = 0 \quad g(0) = 1$	$(*) : y'' - \frac{1}{4}y = \frac{2x+4}{x^3}e^{(-\frac{x}{2})} : \quad f(x) = \frac{x+2}{x} \cdot e^{(-\frac{x}{2})}$ (1) $y'' - \frac{1}{4}y = 0 \quad (y-f) \quad (*) \quad y$ (2) $(*)$ (
7	3
$(E) : y' = -3y + 4e^{-2x}$: $(E) \quad g(x) = \lambda e^{-2x} \quad \lambda$ (1) $(E) \quad f \quad h(x) = f(x) - g(x) \quad \lambda = 4$ (2) $(E') : y' = -3y \quad h$ $(E) \quad (E')$ (3)	$(E) : y'' + \pi^2 y = 0$: (1) $Y(0,5) = 0,5 \quad Y(0) = 1 \quad (E) \quad Y$ (2) $y'' + 4y' + 4y = 0$: (2) $y'' + 2y' - 3y = 0$: (3) $y' + 5y = 0$: (4) $y'' + 11y' + 10y = 0$: (5) $y'' - 4y' + 13y = 0$: (6) $y'' - 2y' + 5y = 0$: (7) $y' - 2y = 4$: (8) $3y' + y = 1$: (9)
8	
$(E) : y' + 6y - 2 = 0$: $f \quad (E) \quad f$ $2 \quad 1$	
9	
$y'' + 2y' + 5y = 0$: (1) $f \quad f'(0) = 2 \quad f(0) = 0 \quad f$ (2)	
10	
$y'(\frac{4\pi}{3}) = \frac{-3\sqrt{3}}{2} \quad y(\frac{2\pi}{3}) = -1 \quad y'' + \frac{9}{4}y = 0$: y (1) $y(x) = A \cdot \cos(\alpha x + \varphi)$: $\varphi \quad \alpha \quad A$ (2)	

$k \in \mathbb{R} \quad y(x) = k \cdot e^{(a \cdot x)} - \frac{b}{a}$	$y' = a y + b$ $b \quad a$
$r^2 + a \cdot r + b = 0$: $\Delta > 0$ $r_2 \quad r_1$ $y(x) = \lambda \cdot e^{(r_1 \cdot x)} + \mu \cdot e^{(r_2 \cdot x)}$:	$y'' + a \cdot y' + b \cdot y = 0$ $b \quad a$
$\Delta = 0$ r $y(x) = (A \cdot x + B) \cdot e^{(r \cdot x)}$:	
$\Delta < 0$ $p - iq \quad p + iq$: $y(x) = e^{(p \cdot x)} \cdot (\lambda \cos(qx) + \mu \sin(qx))$	

$y'' + ay' = 0$: $y(x) = k_1 \cdot e^{-ax} + k_2$:
$y'' + \omega^2 \cdot y = 0$ $y(x) = k_1 \cos(\omega x) + k_2 \sin(\omega x)$
$y'' - \omega^2 \cdot y = 0$: $y(x) = k_1 \cdot e^{(\omega x)} + k_2 \cdot e^{(-\omega x)}$:

الأعداد العقدية (تَمَّة)

-I المعادلات من الدرجة الثانية في \mathbb{C}

1- الجذران المربعان لعدد حقيقي غير منعدم :

-a تعريف :

نقول أن العدد العقدي z جذرا مربعا للعدد الحقيقي Z إذا وفقط إذا كان : $z^2 = Z$.

-b تحديد الجدرين المربعين لعدد حقيقي غير منعدم :

- حالة 1 : $Z \in \mathbb{R}_+$

الجذران المربعان للعدد Z هما \sqrt{Z} و $-\sqrt{Z}$.

- حالة 2 : $Z \in \mathbb{R}_-$

لدينا : $Z = -(-Z)$

$$= i^2 (-Z)$$

$$= (\sqrt{-Z} - i)^2$$

إذن : الجذران المربعان للعدد Z هما $\sqrt{-Z} i$ و $-\sqrt{-Z} i$

$$Z = -3$$

$$= 3 i^2$$

مثال :

إذن الجذران المربعان للعدد -3 هما $\sqrt{3} i$ و $-\sqrt{3} i$.

خاصية :

لكل عدد حقيقي غير منعدم جذران مربعان مختلفان ومتقابلان .

2- المعادلات من الدرجة الثانية في \mathbb{C}

- تعريف :

المعادلة التي تكتب على شكل $a z^2 + b z + c = 0$ حيث : a, b, c أعداد حقيقية و $a \neq 0$ و z عدد عقدي مجهول ، تسمى معادلة من الدرجة الثانية في \mathbb{C} .

- حل المعادلات من الدرجة الثانية في \mathbb{C} :

لتكن a, b, c أعداد حقيقية حيث $a \neq 0$.

$$(E) : a z^2 + b z + c = 0 \Leftrightarrow z^2 + \frac{b}{a} z + \frac{c}{a} = 0 \quad \text{لدينا :}$$

$$\Leftrightarrow z^2 + 2 \frac{b}{2a} z + \frac{b^2}{4a^2} - \frac{b^2}{4a^2} + \frac{c}{a} = 0$$

$$\Leftrightarrow \left(z + \frac{b}{2a} \right)^2 = \frac{b^2}{4a^2} - \frac{4ac}{4a^2}$$

$$\Leftrightarrow \left(z + \frac{b}{2a} \right)^2 = \frac{b^2 - 4ac}{4a^2}$$

$$\Delta = b^2 - 4ac \quad \text{نضع :}$$

ولیکن δ أحد الجذرين المربعين للمميز Δ .

$$(E) : \Leftrightarrow \left(z + \frac{b}{2a}\right)^2 = \frac{\Delta}{4a^2} = \frac{\delta^2}{4a^2} \quad \text{إن :}$$

$$\Leftrightarrow \left(z + \frac{b}{2a}\right)^2 = \left(\frac{\delta}{2a}\right)^2$$

$$\Leftrightarrow z + \frac{b}{2a} = \frac{\delta}{2a} \quad \text{أو} \quad z + \frac{b}{2a} = \frac{-\delta}{2a}$$

$$\Leftrightarrow z = \frac{-b + \delta}{2a} \quad \text{أو} \quad z = \frac{-b - \delta}{2a}$$

$$(E) : az^2 + bz + c = 0 \quad \text{ومنه : حل المعادلة}$$

$$S = \left\{ \frac{-b + \delta}{2a} ; \frac{-b - \delta}{2a} \right\} \quad \text{هو :}$$

خاصية :

حلي المعادلة $az^2 + bz + c = 0$ حيث $a \neq 0$ و $(a, b, c) \in \mathbb{R}^3$ هما :

$$z_1 = \frac{-b - \delta}{2a} \quad \text{و} \quad z_2 = \frac{-b + \delta}{2a}$$

تطبيقات :

حل في \mathbb{C} المعادلات التالية :

$$z^2 + z + 1 = 0 \quad (1)$$

$$\Delta = b^2 - 4ac \quad \text{لدينا :}$$

$$= 1 - 4$$

$$= -3$$

$$= 3i^2$$

$$= (\sqrt{3}i)^2$$

$$S = \sqrt{3}i \quad \text{إن :}$$

ومنه حلي المعادلة هما :

$$z_1 = \frac{-1 - \sqrt{3}i}{2} \quad \text{و} \quad z_2 = \frac{-1 + \sqrt{3}i}{2}$$

$$S = \left\{ \frac{-1 - \sqrt{3}i}{2} ; \frac{-1 + \sqrt{3}i}{2} \right\} \quad \text{ومنه :}$$

$$z^2 + 2z + \frac{1}{\cos^2 \theta} = 0 \quad (2)$$

$$0 < \theta < \frac{\pi}{2} \quad \text{حيث :}$$

$$z^2 + 2z + \frac{1}{\cos^2 \theta} = 0$$

$$\begin{aligned}\Delta &= 4 - \frac{4}{\cos^2 \theta} \\ &= 4 \left(1 - \frac{1}{\cos^2 \theta} \right) \\ &= 4 \left(\frac{\cos^2 \theta - 1}{\cos^2 \theta} \right) \\ &= 4 \left(\frac{-\sin^2 \theta}{\cos^2 \theta} \right) \\ &= -4 \tan^2 \theta \\ &= (2i \tan \theta)^2\end{aligned}$$

$$\delta = 2i \tan \theta \quad \text{إذن :}$$

ومنه : الحلين هما :

$$z_1 = \frac{2 - 2i \tan \theta}{2} = 1 - i \tan \theta$$

$$z_2 = \frac{2 + 2i \tan \theta}{2} = 1 + i \tan \theta$$

$$S = \{1 - i \tan \theta ; 1 + i \tan \theta\} \quad \text{إذن :}$$

طريقة 2 :

$$z^2 - 2z + \frac{1}{\cos \theta} = 0 \quad \text{لدينا :}$$

$$z^2 - 2z + 1 + \tan^2 \theta = 0 \quad \text{أي :}$$

$$(z-1)^2 = -\tan^2 \theta \quad \text{إذن :}$$

$$(z-1)^2 = (i \tan \theta)^2$$

$$z-1 = i \tan \theta \quad \text{أو} \quad z-1 = -i \tan \theta \quad \text{إذن :}$$

$$z = 1 + i \tan \theta \quad \text{أو} \quad z = 1 - i \tan \theta$$

$$S = \{1 - i \tan \theta ; 1 + i \tan \theta\} \quad \text{إذن :}$$

أكتب الحلين على الشكل المثلثي.

$$z_1 = 1 - i \tan \theta \quad \text{لدينا :}$$

$$= 1 - i \frac{\sin \theta}{\cos \theta}$$

$$= \frac{1}{\cos \theta} (\cos \theta - i \sin \theta)$$

$$= \frac{1}{\cos \theta} (\cos(-\theta) + i \sin(-\theta))$$

$$= \left[\frac{1}{\cos \theta}, -\theta \right] \quad \text{لأن } 0 < \cos \theta$$

$$z_2 = 1 + i \tan \theta \quad \text{ولدينا :}$$

$$= \frac{1}{\cos \theta} (\cos \theta + i \sin \theta)$$

$$= \left[\frac{1}{\cos \theta}, \theta \right]$$

ملاحظة :

$$\frac{\pi}{2} < \theta < \pi$$

إذا كانت :

$$\cos \theta < 0$$

فإن :

$$z_1 = \frac{1}{\cos \theta} (\cos \theta + i \sin \theta)$$

إذن :

$$= \frac{-1}{\cos \theta} (-1) (\cos \theta + i \sin \theta)$$

$$= \frac{-1}{\cos \theta} [1, \pi] [1, \theta]$$

$$= \frac{-1}{\cos \theta} [1, \pi + \theta]$$

$$= \left[\frac{-1}{\cos \theta}, \pi + \theta \right]$$

$$R \cdot [r, \theta] = R (r (\cos \theta + i \sin \theta))$$

$$= R \cdot r (\cos \theta + i \sin \theta)$$

$$= [R r, \theta]$$

-II صيغة موافر وصيغتا أولير :

1. صيغة Moivre

$$u = [r, \theta] \quad \text{ليكن}$$

$$|u^n| = |u|^n = 1 \quad \text{نعلم أن}$$

$$\arg u^n = n \theta [2 \pi]$$

$$[1, \theta]^m = [1, m \theta]$$

يعني أن :

$$(\cos \theta + i \sin \theta)^n = \cos n \theta + i \sin n \theta$$

تسمى هذه المتساوية بصيغة موافر.

تطبيقات صيغة موافر.

1- أنشر : $(\cos \theta + i \sin \theta)^2$

لدينا : $(\cos \theta + i \sin \theta)^2 = \cos^2 \theta - \sin^2 \theta + 2i \cos \theta \sin \theta$

وبما أن : $(\cos \theta + i \sin \theta)^2 = \cos 2\theta + i \sin 2\theta$

فإن :

$$\cos 2\theta = \cos^2 \theta - \sin^2 \theta$$

$$\sin 2\theta = 2 \cos \theta \sin \theta$$

2- أنشر : $(\cos \theta + i \sin \theta)^3$

$$(\cos \theta + i \sin \theta)^3 = \cos^3 \theta + 3 \cos^2 \theta \cdot i \sin \theta - 3 \cos \theta \cdot \sin^2 \theta - i \sin^3 \theta$$

$$= (\cos^3 \theta - 3 \cos \theta \sin^2 \theta) + i (3 \cos^2 \theta \sin \theta - \sin^3 \theta)$$

وبما أن : $(\cos \theta + i \sin \theta)^3 = \cos 3\theta + i \sin 3\theta$

إن :

$$\cos 3\theta = \cos^3 \theta - 3 \cos \theta \sin^2 \theta$$

$$\sin 3\theta = 3 \cos^2 \theta \sin \theta - \sin^3 \theta$$

تعميم :

$$(\cos \theta + i \sin \theta)^n = \cos n\theta + i \sin n\theta$$

لدينا :

$$\cos n\theta = \operatorname{Re} ((\cos \theta + i \sin \theta)^n)$$

إن :

$$\sin n\theta = \operatorname{Im} ((\cos \theta + i \sin \theta)^n)$$

2. صيغتا أولير :

1-2 : الترميز الأسّي لعدد عقدي غير منعدم :

نرمز بالرمز $e^{i\theta}$ حيث $\theta \in \mathbb{R}$ للعدد العقدي الذي معياره 1 وعمدته θ .

أي :

$$e^{i\theta} = \cos \theta + i \sin \theta = [1, \theta]$$

أمثلة :

1- $e^{i\frac{\pi}{2}} = \cos \frac{\pi}{2} + i \sin \frac{\pi}{2} = i$

2- $e^{i\frac{\pi}{3}} = \cos \frac{\pi}{3} + i \sin \frac{\pi}{3} = \frac{1}{2} + i \frac{\sqrt{3}}{2}$

ملاحظة :

$$z = [R, \theta] \quad \text{1- إذا كان :}$$

$$z = R \cdot e^{i\theta} \quad \text{فإن :}$$

$$\arg z_2 \equiv \alpha [2\pi] \quad ; \quad \arg z_1 \equiv \theta [2\pi] \quad \text{2- إذا كان :}$$

$$\arg \frac{z_1}{z_2} \equiv \theta - \alpha \quad ; \quad \arg z_1 \times z_2 \equiv \theta + \alpha [2\pi] \quad \text{فإن :}$$

$$\frac{e^{i\theta}}{e^{i\alpha}} = e^{i(\theta-\alpha)} \quad ; \quad e^{i\theta} \cdot e^{i\alpha} = e^{i(\theta+\alpha)}$$

$$\forall n \in \mathbb{Z}$$

$$\arg z^n = n \arg z [2\pi]$$

$$(e^{i\theta})^n = e^{in\theta}$$

$$e^0 = 1$$

$$e^{i\pi} = -1$$

2-2 : صيغتا أولير :

$$e^{i\theta} = \cos \theta + i \sin \theta \quad \text{لدينا :}$$

$$e^{-i\theta} = \cos \theta - i \sin \theta$$

إذن :

$$\cos \theta = \frac{e^{i\theta} + e^{-i\theta}}{2}$$

$$\sin \theta = \frac{e^{i\theta} - e^{-i\theta}}{2i}$$

نسمي هاتين المتساويتين بصيغتي أولير.

ملاحظة :

$$\cos n\theta = \frac{e^{in\theta} + e^{-in\theta}}{2}$$

$$\sin n\theta = \frac{e^{in\theta} - e^{-in\theta}}{2i}$$

تطبيقات صيغتا أولير :

La linéarisation

الخطا

مثال :

$$\text{1- أخط } \cos^2 \theta$$

$$\cos \theta = \frac{e^{i \theta} + e^{-i \theta}}{2} \quad \text{لدينا :}$$

$$\begin{aligned} \cos^2 \theta &= \frac{(e^{i \theta} + e^{-i \theta})^2}{4} \\ &= \frac{1}{4} (e^{2i \theta} + e^{-2i \theta} + 2) \quad \text{إذن :} \\ &= \frac{1}{2} + \frac{1}{4} (2 \cos 2\theta) \\ &= \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \cos 2\theta \end{aligned}$$

2- أخطط $\sin^2 \theta$

$$\sin \theta = \frac{e^{i \theta} - e^{-i \theta}}{2i} \quad \text{لدينا :}$$

$$\begin{aligned} \sin^2 \theta &= \frac{e^{2i \theta} + e^{-2i \theta} - 2}{-4} \quad \text{إذن :} \\ &= -\frac{1}{2} \left(\frac{e^{2i \theta} + e^{-2i \theta}}{2} \right) + \frac{1}{2} \\ &= -\frac{1}{2} \cos 2\theta + \frac{1}{2} \end{aligned}$$

3- أخطط $\cos^3 \theta$

$$\begin{aligned} \cos \theta &= \frac{e^{i \theta} + e^{-i \theta}}{2} \\ \cos^3 \theta &= \frac{1}{8} (e^{3i \theta} + 3e^{2i \theta} \cdot e^{-i \theta} + 3e^{i \theta} \cdot e^{-2i \theta} + e^{-3i \theta}) \\ &= \frac{1}{8} (e^{3i \theta} + e^{-3i \theta} + 3(e^{i \theta} + e^{-i \theta})) \\ &= \frac{1}{8} (2 \cos 3\theta + 6 \cos \theta) \\ &= \frac{1}{4} \cos 3\theta + \frac{3}{4} \cos \theta \end{aligned}$$

إذن :

$$\cos^3 \theta = \frac{1}{4} \cos 3\theta + \frac{3}{4} \cos \theta$$

تعريف :

الإخطاط هو كتابة $\cos^n x$ و $\sin^n x$ بدلالة $\cos kx$ و $\sin kx$.

الإخطاط باستعمال صيغة Moivre

$$z = \cos \theta + i \sin \theta \quad \text{نضع :}$$

$$\bar{z} = \cos \theta - i \sin \theta$$

$$z \bar{z} = 1$$

$$2 \cos \theta = z + \bar{z} \quad \text{و} \quad 2 i \sin \theta = z - \bar{z}$$

$$z^n = \cos n\theta + i \sin n\theta$$

$$\bar{z}^n = \cos n\theta - i \sin n\theta$$

$$z^n \cdot \bar{z}^n = 1$$

$$2 \cos n\theta = z^n + \bar{z}^n \quad \text{و} \quad 2 i \sin n\theta = z^n - \bar{z}^n$$

أخطط

$$2 \cos \theta = z + \bar{z}$$

لدينا :

$$8 \cos^3 \theta = (z + \bar{z})^3$$

$$= z^3 + 3 z^2 \bar{z} + 3 z \bar{z}^2 + \bar{z}^3$$

$$= z^3 + \bar{z}^3 + 3(z + \bar{z})$$

$$= 2 \cos 3\theta + 3 \times 2 \cos \theta$$

$$= \frac{1}{4} \cos 3\theta + \frac{3}{4} \cos \theta$$

التمثيل العقدي للدوران

المستوى العقدي منسوب الى معلم م م
نعتبر الدوران r الذي مركزه $\Omega(\omega)$ وزاويته θ

$$r(M) = M' \Leftrightarrow \begin{cases} \Omega M = \Omega M' \\ \overline{(\Omega M, \Omega M')} \equiv \theta [2\pi] \end{cases} \quad \text{لدينا}$$

$$\begin{cases} |z' - \omega| = |z - \omega| \\ \arg \frac{z' - \omega}{z - \omega} \equiv \theta [2\pi] \end{cases} \quad \text{اذن}$$

$$z' - \omega = e^{i\theta} (z - \omega) \quad \text{ومنه}$$

خاصية

التمثيل العقدي للدوران الذي مركزه $\Omega(\omega)$ وزاويته θ

$$z' - \omega = e^{i\theta} (z - \omega) \quad \text{هو}$$

تمارين حول الأعداد العقدية (تتمّة)

01

 \mathbb{C}

$$\begin{array}{l|l} E_2 : z^2 - 2(\cos \alpha)z + 1 = 0, \alpha \in [0, \pi] & E_1 : z^2 - z + 1 = 0 \\ E_4 : (iz + 2)^2 - 6(iz + 2) - 7 = 0 & E_3 : (5z - 3i)^2 + 1 = 0 \\ E_6 : z^2 - 2(1 - \cos \theta)z + 2(1 - \cos \theta) = 0 & E_5 : z^2 - 6z + 13 = 0 \\ E_8 : z^2 - 2(1 + \sqrt{3})z + 5 + 2\sqrt{3} = 0 & E_7 : (z + 1)^2 = z - 13 \end{array}$$

02

$$P(z) = z^4 - 2z^3 + 3z^2 - 2z + 2 :$$

$$P(z) = (z^2 + 1)(z^2 + az + b) : \quad b \quad a \quad (1)$$

$$z^2 - 2z + 2 = 0 : \quad \mathbb{C} \quad (2)$$

$$P(z) = 0 : \quad ($$

03

$$(\quad)$$

$$C = (-1 + i)^{12} \quad B = \frac{1 + i\sqrt{3}}{i\sqrt{3} - 1} \quad A = \frac{2 - 2i}{\sqrt{3} + i} : \quad (1)$$

$$D = (3e^{i\frac{\pi}{3}})^{2007} : \quad (2)$$

$$F = 3 \cdot e^{i\frac{5\pi}{4}} \quad E = 5 \cdot e^{i\frac{\pi}{6}} : \quad (3)$$

$$G = 1 + e^{2i\theta} : \quad (4)$$

$$\frac{\pi}{4} \quad \Omega(-1 + i) \quad (5)$$

$$\sin^4 x \quad \cos^3 x \quad (6)$$

04

$$z^4 = 1 : \quad z^4 - 1 = (z^2 - 1)(z^2 - i)(z + i) \quad (1)$$

$$\left(\frac{z-i}{z+1}\right)^4 = 1 : \quad \mathbb{C} \quad (2)$$

05

$$(E) : z \in \mathbb{C}^*, \quad z^2 - (1 + i)\bar{z} = 0$$

$$(E) \quad (1)$$

$$(2007 / 2006) \quad (E) \quad (2)$$

$$\sin\left(\frac{\pi}{12}\right) \quad \cos\left(\frac{\pi}{12}\right) \quad (3)$$

06

$$f(z) = \frac{iz^2}{z+1} : \quad \mathbb{C} \setminus \{-1\} \quad z \quad (94/93)$$

$$f(z) = \left[\frac{1}{2\cos(\frac{\theta}{2})}, \frac{3\theta + \pi}{2} \right] : \quad \theta \in]0, \pi[, z = [1; \theta]$$

07

$$\text{Im}(z_1) > 0 \quad z_2 \quad z_1 \quad z^2 - 2z + 4 = 0 : \quad \mathbb{C} \quad (1 \text{ (I)})$$

$$(z_1)^{2008} \quad (2)$$

$$O \quad B(1 - i\sqrt{3}) \quad A(1 + i\sqrt{3}) \quad (1 \text{ (II)})$$

$$2 \text{ cm} \quad (2)$$

$$\frac{-\pi}{2} \quad O \quad r_1 \quad O \quad O' \quad (3)$$

$$\frac{\pi}{2} \quad A \quad r_2 \quad B \quad B' \quad ($$

$$\overline{AI} \quad [OB] \quad I \quad (4)$$

$$3\sqrt{3} - i \quad \overline{O'B'} \quad ($$

$$AO'B' \quad (AI) \quad ($$

08

$$\theta \in]0, \pi[, z = [1; \theta] \quad g(z) = \frac{z}{1 - z^2} :$$

$$z \cdot g(z) = \left[\frac{1}{2\sin \theta} ; \theta + \frac{\pi}{2} \right] \quad g(z) = \frac{i}{2\sin \theta} : \quad (1) \quad (96/95)$$

$$(z_0 \cdot g(z_0))^6 : \quad z_0 = \frac{\sqrt{3} + i}{2} : \quad (2)$$

10

$$b = [2\sqrt{3}, -\frac{\pi}{6}] \quad a = [2, \frac{2\pi}{3}] :$$

$$H(ab + 4\sqrt{3}) \quad F(ab) \quad E(4\sqrt{3}) : \quad (1)$$

$$OEHF \quad (\widehat{OE}, \widehat{OF})$$

$$Z = \frac{a}{2} + \frac{\bar{b}}{2\sqrt{3}} \quad (2)$$

$$Z \quad ($$

$$\sin\left(\frac{5\pi}{12}\right) \quad \cos\left(\frac{5\pi}{12}\right) \quad ($$

(2006/2005)

11

$$P(z) = z^4 - 6z^3 + 24z^2 - 18z + 63 : \quad \mathbb{C} \quad z$$

$$P(-i\sqrt{3}) \quad P(i\sqrt{3}) \quad (1)$$

$$P(z) = (z^2 + 3)(z^2 + az + b) \quad b \quad a \quad (2)$$

$$D(3 - 2i\sqrt{3}) \quad C(3 + 2i\sqrt{3}) \quad B(-i\sqrt{3}) \quad A(i\sqrt{3}) \quad (3)$$

(

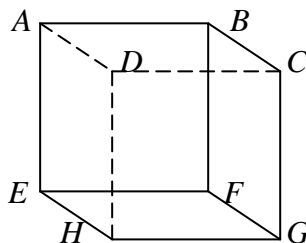
$$BEC \quad \frac{z_C - z_B}{z_E - z_B} = e^{i\frac{\pi}{3}} \quad O \quad D \quad E \quad (4)$$

الجداء السلمي في V_3

I- الجداء السلمي

أنشطة :

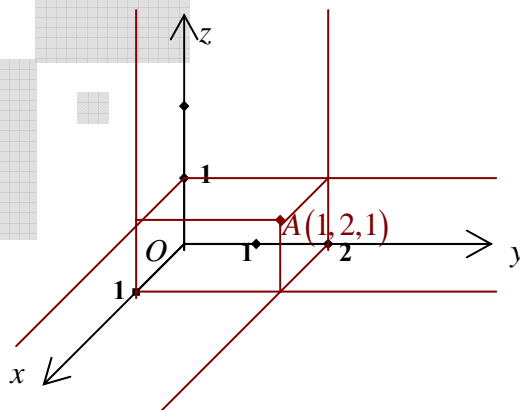
- 1- ليكن $ABCDEFGH$ مكعبا في الفضاء \mathcal{E} طول حرفه 1 ومركزه O .
أحسب الجداءات السلمية التالية : $\overrightarrow{OB} \cdot \overrightarrow{HF}$ ، $\overrightarrow{DB} \cdot \overrightarrow{EG}$ ، $\overrightarrow{DB} \cdot \overrightarrow{AC}$ ، $\overrightarrow{DF} \cdot \overrightarrow{DH}$ ، $\overrightarrow{EG} \cdot \overrightarrow{EC}$



$$\begin{aligned}\overrightarrow{EG} \cdot \overrightarrow{EC} &= EG^2 = EH^2 + HG^2 = 2 \\ \overrightarrow{DF} \cdot \overrightarrow{DH} &= \overrightarrow{DH} \cdot \overrightarrow{DF} = DH^2 = 1 \\ \overrightarrow{DB} \cdot \overrightarrow{AC} &= 0 \quad (\overrightarrow{DB} \perp \overrightarrow{AC}) \quad \text{لأن} \\ \overrightarrow{DB} \cdot \overrightarrow{EG} &= \overrightarrow{DB} \cdot \overrightarrow{AC} = 0 \\ \overrightarrow{OB} \cdot \overrightarrow{HF} &= \frac{1}{2} \overrightarrow{HB} \cdot \overrightarrow{HF} \\ &= \frac{1}{2} HF^2 \\ &= 1\end{aligned}$$

- 2- الفضاء \mathcal{E} منسوب إلى م.م.م $(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$.

أنشئ النقطة $A(1, 2, 1)$.



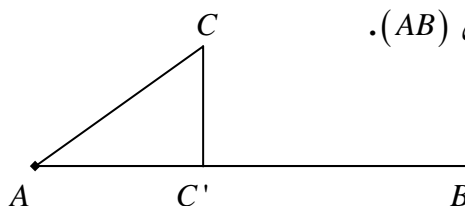
تذكير :

إذا كانت \vec{u} و \vec{v} متجهتين من المستوى المتجهي V_2 و A, B, C ثلاث نقط من المستوى P بحيث :

$$\begin{aligned}\vec{u} &= \overrightarrow{AB} \quad \text{و} \quad \vec{v} = \overrightarrow{AC} \\ \vec{u} \cdot \vec{v} &= \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} \\ &= \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC'}\end{aligned}$$

فإن :

بحيث : C' هي المسقط العمودي للنقطة C على (AB) .



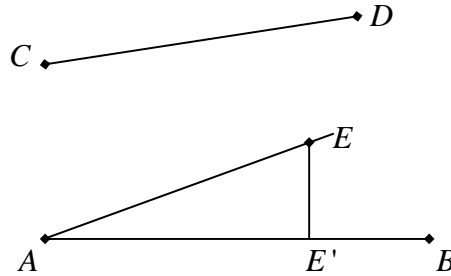
تعريف :

يمكن تحديد تعريف الجداء السلمي من المستوى إلى الفضاء وذلك كما يلي :

إذا كانت \vec{u} و \vec{v} متجهتين من V_3 و A, B, C, D أربع نقط من الفضاء \mathcal{E} بحيث $\vec{v} = \overrightarrow{CD}$ و $\vec{u} = \overrightarrow{AB}$ فإنه توجد نقطة وحيدة E بحيث $\vec{v} = \overrightarrow{AE}$. والجداء السلمي للمتجهتين \vec{u} و \vec{v} هو العدد الحقيقي $\vec{u} \cdot \vec{v}$ بحيث :

$$\vec{u} \cdot \vec{v} = \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{CD} = \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AE} = \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AE'}$$

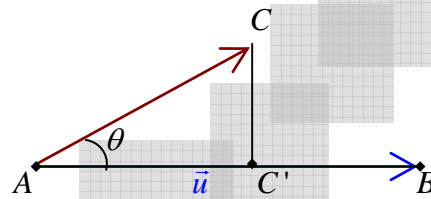
بحيث E' هو المسقط العمودي للنقطة E على (AB) .

**الصيغة التحليلية للجداء السلمي :**

لتكن \vec{u} و \vec{v} متجهتين من V_3 ، $\vec{u} \neq 0$ و $\vec{v} \neq 0$.

$\vec{u} = \overrightarrow{AB}$ و $\vec{v} = \overrightarrow{AC}$: حيث A, B, C ثلاث نقط من \mathcal{E} .

وليكن θ قياسا للزاوية $[B\hat{A}C]$.



$$\begin{aligned}\vec{u} \cdot \vec{v} &= \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} \\ &= \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC'}\end{aligned}$$

الحالة ① : $0 \leq \theta \leq \frac{\pi}{2}$

$$\cos \theta = \frac{AC'}{AC}$$

$$AC' = AC \cdot \cos \theta$$

$$\vec{u} \cdot \vec{v} = AB \cdot AC'$$

$$\vec{u} \cdot \vec{v} = AB \cdot AC \cdot \cos \theta$$

$$\boxed{\vec{u} \cdot \vec{v} = \|\vec{u}\| \cdot \|\vec{v}\| \cdot \cos \theta}$$

إذن :

ومنه :

أو

الحالة ② : $\frac{\pi}{2} \leq \theta \leq \pi$

$$\vec{u} \cdot \vec{v} = -AB \cdot AC'$$

$$\cos(\pi - \theta) = \frac{AC'}{AC}$$

$$AC' = AC \cos(\pi - \theta)$$

$$\vec{u} \cdot \vec{v} = -AB \cdot AC \cdot \cos(\pi - \theta)$$

$$\vec{u} \cdot \vec{v} = AB \cdot AC \cdot \cos \theta$$

إذن :

إذن :

$$= \|\vec{u}\| \cdot \|\vec{v}\| \cdot \cos \theta$$

خاصية :

إذا كانت \vec{u} و \vec{v} متجهتين من الفضاء المتجهي V_3
 و A, B, C ثلاث نقاط من الفضاء E بحيث : $\vec{u} = \overrightarrow{AB}$
 و $\vec{v} = \overrightarrow{AC}$ و θ قياس الزاوية $[BAC]$.
 فإن : $\vec{u} \cdot \vec{v} = AB \cdot AC \cdot \cos \theta$

خاصيات الجداء السلمي :

1- تعامد متجهتين :

خاصية :

لتكن \vec{u} و \vec{v} متجهتين من V_3 .
 $\vec{u} \cdot \vec{v} = 0 \Leftrightarrow \vec{u} \perp \vec{v}$ أو $\vec{u} = \vec{0}$ أو $\vec{v} = \vec{0}$

2- منظم متجهة :

لتكن \vec{u} متجهة من V_3 .

منظم المتجهة \vec{u} هو العدد الحقيقي الموجب $\|\vec{u}\| = \sqrt{u^2}$ (u^2 هو المربع السلمي للمتجهة \vec{u}).

3- الأساس والمعتمد المتعامدان :

لتكن \vec{i} و \vec{j} و \vec{k} ثلاث متجهات من V_3 غير مستوائية.

نقول أن $(\vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ أساس متعامد في V_3 .

إذا كانت المتجهات \vec{i} و \vec{j} و \vec{k} متعامدة متتلى متتلى، وإذا كانت المتجهات \vec{i} و \vec{j} و \vec{k} واحدة فإن الأساس $(\vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ متعامد وممنظم.

$(\vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ أساس متعامد وممنظم



$$\|\vec{i}\| = \|\vec{j}\| = \|\vec{k}\| = 1 \quad -1$$

$$\vec{i} \perp \vec{j} \text{ و } \vec{i} \perp \vec{k} \text{ و } \vec{j} \perp \vec{k} \quad -2$$

ونقول أن المعتمد $(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ متعامد وممنظم، إذا وفقط إذا كان الأساس $(\vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ متعامد وممنظم.

الصيغة التحليلية للجداء السلمي لمتجهتين في الفضاء :

الفضاء المتجهي V_3 موزد بالأساس المتعامد والممنظم $(\vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$.

نعتبر المتجهتين :

$$\vec{u} = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}$$

$$\vec{v} = x'\vec{i} + y'\vec{j} + z'\vec{k}$$

$$\begin{aligned} \vec{u} \cdot \vec{v} &= (x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}) \cdot (x'\vec{i} + y'\vec{j} + z'\vec{k}) \\ &= xx' + yy' + zz' \end{aligned}$$

خاصية :

لتكن \vec{u} و \vec{v} متجهتين من V_3 .

حيث : $\vec{u}(x, y, z)$ و $\vec{v}(x', y', z')$

لدينا : $\vec{u} \cdot \vec{v} = xx' + yy' + zz'$

خاصية :

لتكن (x, y, z) و (x', y', z') هما مثلوثي إحداثيات المتجهتان \vec{u} و \vec{v} بالنسبة للأساس المتعامد والممنظم $(\vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$.

$$\vec{u} \perp \vec{v} \Leftrightarrow xx' + yy' + zz' = 0$$

ملاحظة :

1- إذا كانت : $\vec{u}(x, y, z)$

$$\|\vec{u}\| = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2} \quad \text{فإن :}$$

2- إذا كانت : $A(x_A, y_A, z_A)$ و $B(x_B, y_B, z_B)$

$$AB = \sqrt{(x_B - x_A)^2 + (y_B - y_A)^2 + (z_B - z_A)^2} \quad \text{فإن :}$$

II - تطبيقات الجداء السلمي :تطبيق 1 :

ليكن (D) المستقيم المار من النقطة A حيث : $\vec{OA} = \vec{i} + \vec{j}$

و \vec{u} متجهة موجهة له حيث :

$$\vec{u} = \vec{i} - \vec{j} + \vec{k}$$

1- اعط تمثيلا بارامتريا للمستقيم (D) .

2- اعط معادلة ديكرتية للمستوى (P) المار من O والذي يحقق : $(D) \perp (P)$

3- استنتج تمثيلا بارامتريا للمستوى (P) .

الجواب :

1- الحالة العامة :

لدينا :

$$M \in D \Leftrightarrow \exists t \in \mathbb{R} / \vec{AM} = t\vec{u}$$

$$\Leftrightarrow \begin{pmatrix} x - x_A \\ y - y_A \\ z - z_A \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ta \\ tb \\ tc \end{pmatrix} \quad t \in \mathbb{R}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x = x_A + ta \\ y = y_A + tb \\ z = z_A + tc \end{cases} \quad t \in \mathbb{R}$$

الحالة الخاصة :

$$D : \begin{cases} x = 1 + t \\ y = 1 - t \\ z = t \end{cases} \quad t \in \mathbb{R}$$

$$M \in (P) \Leftrightarrow \overrightarrow{OM} \perp \vec{u} \quad -2$$

$$\Leftrightarrow x - y + z = 0$$

$$(P) : x - y + z = 0 \quad \text{ومنه معادلة :}$$

$$x - y + z = 0 \quad \text{لدينا :}$$

$$x = y - z \quad \text{إذن :}$$

$$z = \beta \quad \text{و} \quad y = \alpha \quad \text{نضع :}$$

$$\begin{cases} x = \alpha - \beta \\ y = \alpha \\ z = \beta \end{cases} \quad / \quad (\alpha, \beta) \in \mathbb{R}^2 \quad \text{إذن :}$$

وهذا تمثيل بارامتري للمستوى (P) .

تطبيق 2 :

تحديد مستوى بنقطة ومتجهة منظمة.

حدد مجموعة النقط M من الفضاء \mathcal{E} . بحيث : $\vec{u} \cdot \overrightarrow{AM} = k$ في الحالات التالية :

$$-a \quad k = 0, \quad A(1,1,1) \quad \text{و} \quad \vec{u}(1,2,-1).$$

$$\overrightarrow{AM}(x-1, y-1, z-1) \quad \text{لدينا :}$$

$$\vec{u}(1,2,-1) \quad \text{و :}$$

$$\vec{u} \cdot \overrightarrow{AM} = 0 \quad \text{و :}$$

$$1(x-1) + 2(y-1) - 1(z-1) = 0 \quad \text{إذن :}$$

$$\text{إذن : مجموعة النقط } M \text{ من الفضاء بحيث : } \vec{u} \cdot \overrightarrow{AM} = 0 \text{ هي المستوى ذو المعادلة : } x + 2y - z - 2 = 0$$

$$-b \quad k = 2, \quad A(1,0,1) \quad \text{و} \quad \vec{u}(1,1,2).$$

$$\overrightarrow{AM}(x-1, y, z-1) \quad \text{لدينا :}$$

$$\vec{u} \cdot \overrightarrow{AM} = 2 \quad \text{و :}$$

$$1(x-1) + y + 2(z-1) = 2$$

$$x + y + 2z - 5 = 0$$

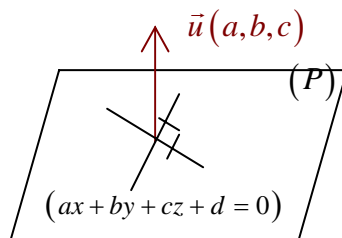
خاصية :

• إذا كانت $\vec{n}(a,b,c)$ حيث $(a,b,c) \neq (0,0,0)$ منظمة على المستوى (P) ، فإن

$$ax + by + cz + d = 0 \quad \text{معادلة ديكارتية للمستوى } (P) \text{ حيث } d \in \mathbb{R}.$$

• إذا كانت معادلة (P) تكتب على شكل $ax + by + cz = 0$

فإن المتجهة $\vec{u}(a,b,c)$ منظمة على (P) .



تطبيق 3 :

نعتبر في الفضاء \mathcal{E} المنسوب إلى M $(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ المستوى (P) الذي معادلته هي : $P(3x - y + 2z - 4 = 0)$ والنقطة $A(0, -2, 1)$ من (P) .

1- حدد تمثيلا بارامتريا للمستقيم (D) الذي يمر من A ويقبل $\vec{u}(1, -1, -2)$ متجهة موجهة له. تحقق أن : $(D) \subset (P)$

2- H و K هما المسقطان العموديان على التوالي للنقطة $B\left(1, 0, \frac{-41}{2}\right)$ على (P) و (D) . حدد إحداثيات كل من H و K .

3- أحسب الجداء السلمي $\vec{u} \cdot \overrightarrow{KH}$ واستنتج أن المستقيم (D) عمودي على المستوى (BKH) .

الجواب :

1- $D : \begin{cases} x = t \\ y = -2 - t \\ z = 1 - 2t \end{cases}$

لنتحقق أن : $(D) \subset (P)$

$$3t(-2-t) + 2(1-2t) - 4 = 3t + 2 + t + 2 - 4t - 4 = 0$$

إذن : $(D) \subset (P)$

2- لدينا : $H \in (\Delta) \cap (P)$

حيث : (Δ) هو المستقيم المار من B والعمودي على (P) .

ولدينا : $(\Delta) : \begin{cases} x = 1 + 3t \\ y = -t \\ z = \frac{-41}{2} + 2t \end{cases} / t \in \mathbb{R}$

و : $(P) : 3x - y + 2z - 4 = 0$

إذن : $3(1+3t) - (-t) + 2\left(\frac{-41}{2} + 2t\right) - 4 = 0$

$$3 + 9t + t - 41 + 4t - 4 = 0$$

$$14t = 42$$

$$t = 3$$

ومنه : $H\left(10, -3, \frac{-29}{2}\right)$

3- لنحسب : $\vec{u} \cdot \overrightarrow{KH}$

لدينا : $\vec{u}(1, -1, -2)$

$$\overrightarrow{KH}\left(3, 6, \frac{-3}{2}\right)$$

إذن : $\vec{u} \cdot \overrightarrow{KH} = 3 - 6 + 3 = 0$

وبما أن : $\overrightarrow{BK} \perp \vec{u}$

و : $\overrightarrow{KH} \perp \vec{u}$

فإن : $(D) \perp (BKH)$

خاصية وتذكير :

لتكن \vec{n} متجهة موجهة للمستقيم (D) . و \vec{u} و \vec{v} متجهتان موجهتان للمستوى (P) .

- يكون $(D) \perp (P)$ إذا وفقط إذا كان $\vec{u} \perp \vec{n}$ و $\vec{v} \perp \vec{n}$.
- يكون $(D) \perp (P)$ إذا وفقط إذا كانت \vec{n} منظمية على (P) .

تطبيق 4 : تعامد مستويين.

① أعط معادلة ديكارتية للمستوى (P) المار من النقطتين $A(-1, 2, 0)$ و $B(3, 1, -2)$ وعمودي على المستوى ذو المعادلة $3x - 7y + 2z = 0$.

$$\overrightarrow{AB}(4, -1, -2)$$

لدينا :

$$\vec{n}(3, -7, 2)$$

$$M \in (P) \Leftrightarrow \det(\overrightarrow{AM}, \vec{n}, \overrightarrow{AB}) = 0$$

$$\Leftrightarrow \begin{vmatrix} x+1 & 3 & 4 \\ y-2 & -7 & -1 \\ z & 2 & -2 \end{vmatrix} = 0$$

ط1 :

$$(x+1) \begin{vmatrix} -7 & -1 \\ 2 & -2 \end{vmatrix} - (y-2) \begin{vmatrix} 3 & 4 \\ 2 & -2 \end{vmatrix} + z \begin{vmatrix} 3 & 4 \\ -7 & -1 \end{vmatrix} = 0$$

$$16(x+1) + 14(y-2) + 25z = 0$$

$$16x + 14y + 25z - 12 = 0$$

ط2 :

$$\Leftrightarrow \begin{vmatrix} x+1 & 3 & 4 \\ y-2 & -7 & -1 \\ z & 2 & -2 \end{vmatrix} = 0$$

$$14(x+1) - 3z + 8(y-2) + 28z + 2(x+1) + 6(y-2) = 0$$

$$16x + 14y + 25z - 12 = 0$$

② أدرس تعامد المستويين (P) و (Q) في الحالتين التاليتين :

$$(P): 2x - 5y - z = 0 \quad -a$$

$$(Q): x + 2z - 3 = 0$$

$$\text{لدينا : } \vec{n}_1(2, -5, -1) \text{ منظمية على } (P)$$

$$\text{ولدينا : } \vec{n}_2(1, 0, 2) \text{ منظمية على } (Q)$$

$$\vec{n}_1 \cdot \vec{n}_2 = 2 - 2 = 0 \quad \text{و :}$$

$$(P) \perp (Q) \quad \text{إذن :}$$

$$(P): 3x - y - 2z - 5 = 0 \quad -b$$

$$(Q): x + 4y - 3z + 2 = 0$$

$$(3 \times 1) + (-1 \times 4) + (-2 \times -3) = 3 - 4 + 6 \quad \text{لدينا :}$$

$$= 5 \neq 0$$

ومنه : (P) و (Q) غير متعامدان.

خلاصة :

يكون المستويين $P(ax+by+cz+d=0)$ و $Q(a'x+b'y+c'z+d'=0)$ متعامدين إذا وفقط إذا كان :

$$aa'+bb'+cc'=0$$

تطبيق 5 : تعامد مستقيمين.

أدرس تعامد المستقيمين (D) و (Δ) في الحالات التالية :

$$D(A, \vec{u}) \quad -a$$

$$A(0,1,-1) \quad \text{حيث :}$$

$$\vec{u}(1,1,1)$$

$$\Delta = \begin{cases} x=t \\ y=-2t \\ z=1+t \end{cases} / (t \in \mathbb{R}) \quad \text{و :}$$

لدينا : $\vec{u}(1,1,1)$ موجهة لـ (D).

و : $\vec{v}(1,-2,1)$ موجهة لـ (Δ).

$$\vec{u} \cdot \vec{v} = 1 - 2 + 1 = 0$$

ومنه : $(\Delta) \perp (D)$

-b $(D) = (A, \overrightarrow{AB})$ حيث $A(0,1,-1)$ و $B(1,0,1)$

و (Δ) يمر من أصل المعلم ومتجهته الموجهة هي : $\vec{v} = \vec{i} + \vec{j}$

$$\overrightarrow{AB}(1,-1,2) \quad \text{لدينا :}$$

$$\vec{v}(1,1,0) \quad \text{و}$$

$$\overrightarrow{AB} \cdot \vec{v} = 1 - 1 + 0 = 0 \quad \text{إذن :}$$

ومنه : $(D) \perp (\Delta)$

خلاصة :

يكون المستقيمين $D(A, \vec{u})$ و $\Delta(B, \vec{v})$ متعامدين إذا وفقط إذا كان :

$$\vec{u} \cdot \vec{v} = 0$$

تطبيق 6 : مسافة نقطة عن مستوى.

ليكن (P) مستوى و \vec{n} متجهة منظمية عليه ، و M نقطة من الفضاء ع.

-1 بين أن لكل B من (P) : $\overrightarrow{AB} \cdot \vec{n} = \overrightarrow{AH} \cdot \vec{n}$

حيث : H هي المسقط العمودي للنقطة A على (P).

$$\overrightarrow{AB} \cdot \vec{n} = (\overrightarrow{AH} + \overrightarrow{HB}) \cdot \vec{n}$$

$$= \overrightarrow{AH} \cdot \vec{n}$$

$$(\overrightarrow{HB} \perp \vec{n})$$

$$AH = \frac{|\overrightarrow{AB} \cdot \vec{n}|}{\|\vec{n}\|} \quad \text{-2 بين أن :}$$

$$\overrightarrow{AB} \cdot \vec{n} = \overrightarrow{AH} \cdot \vec{n} \quad \text{لدينا :}$$

$$\pm \overrightarrow{AH} \cdot \|\vec{n}\| = \overrightarrow{AB} \cdot \vec{n}$$

$$AH \cdot \|\vec{n}\| = |\overrightarrow{AB} \cdot \vec{n}| \quad \text{إذن :}$$

$$AH = \frac{|\overrightarrow{AB} \cdot \vec{n}|}{\|\vec{n}\|} \quad \text{إذن :}$$

-3 لتكن $(x + y + z + 1 = 0)$ معادلة ديكرتية للمستوى (P) و $A(1,0,1)$ نقطة من ξ .

- أحسب مسافة A عن المستوى (P) . $d(A, (P))$

$$B(1,1,-3) \in (P) \quad \text{لدينا :}$$

$$d(A, (P)) = AH \quad \text{إذن :}$$

حيث H هو المسقط العمودي للنقطة A على (P) .

$$AH = \frac{|\overrightarrow{AB} \cdot \vec{n}|}{\|\vec{n}\|}$$

$$\overrightarrow{AB}(0,1,-4)$$

$$\vec{n}(1,1,1)$$

$$AH = \frac{|(0 \times 1) + (1 \times 1) + (-4 \times 1)|}{\sqrt{1+1+1}} \quad \text{إذن :}$$

$$= \frac{3}{\sqrt{3}} = \sqrt{3}$$

-4 لتكن $\vec{n}(a,b,c)$ منظمية على (P) .

و : $(ax + by + cz + d = 0)$ معادلة ديكرتية للمستوى (P) .

و : $A(x_A, y_A, z_A)$ نقطة من الفضاء ξ .

$$d(A, (P)) = \frac{|\overrightarrow{AB} \cdot \vec{n}|}{\|\vec{n}\|} / B(x_B, y_B, z_B) \quad \text{لدينا :}$$

$$d(A, (P)) = \frac{|a(x_B - x_A) + b(y_B - y_A) + c(z_B - z_A)|}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}}$$

$$= \frac{|-ax_A - by_A - cz_A - d|}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}}$$

$$= \frac{|ax_A + by_A + cz_A + d|}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}}$$

خلاصة وخاصة :

ليكن : $(P): ax + by + cz + d = 0$

و : $A(x_A, y_A, z_A)$ نقطة من ξ .

$$d(A, (P)) = \frac{|ax_A + by_A + cz_A + d|}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}}$$

- 1- حدد متجهة \vec{w} واحدة وعمودية على $\vec{u}(-1;1;1)$ و $\vec{v}(1;-2;0)$
 2- حدد متجهة \vec{w} عمودية على $\vec{u}(1;1;0)$ و $\vec{v}(0;2;1)$ و $\|\vec{w}\| = \sqrt{3}$

نعتبر $A(1;1;\sqrt{2})$ و $B(\sqrt{2};-\sqrt{2};0)$ و $C(-1;-1;-\sqrt{2})$
 بين أن ABC مثلث متساوي الساقين وقائم الزاوية

في الفضاء المنسوب إلى معلم م. $(O; \vec{i}; \vec{j}; \vec{k})$ نعتبر المستوى

$$\begin{cases} x = 2t \\ y = 1 + 3t \\ z = -2 + bt \end{cases} \quad t \in \mathbb{R}$$

(P) الذي معادلته $ax-2y+z-2=0$ و المستقيم (D) تمثيله بارامتري

- 1- حدد متجهتين موجهتين للمستوى (P)
 2- حدد b لكي يكون $(D) \perp (P)$

$$(D): \begin{cases} x+y-2z+1=0 \\ x-y+z-2=0 \end{cases} \quad (P) : 2x-y+3z+1=0$$

نعتبر

- 1- حدد متجهة \vec{u} منتظمة على (P) ونقطة منه.
 2- حدد معادلة ديكارتية للمستوى المار من $A(2;0;3)$ و $\vec{n}(1,2,1)$ منتظمة عليه.
 3- حدد معادلة ديكارتية للمستوى المار من $A'(2;0;3)$ والعمودي على (D)
 4- حدد معادلة ديكارتية للمستوى المار من $A(2;0;3)$ و الموازي لـ (P)

في فضاء منسوب إلى معلم متعامد ممنظم .
 نعتبر $A(1;-1;1)$ و $B(3;1;-1)$ و (P) المستوى ذا المعادلة $2x-3y+2z=0$ و (D) المستقيم الممثل

$$\begin{cases} x = 3t \\ x = -2 - 3t \\ z = 2 + 4t \end{cases} \quad t \in \mathbb{R}$$

بارا متريا بـ

- 1- حدد معادلة ديكارتية للمستوى (Q) المار من A والعمودي على المستقيم (D)
 حدد معادلة ديكارتية للمستوى (Q') المار من A و B والعمودي على المستوى (P)
 2- أحسب $d(A;(P))$ و $d(A;(D))$
 3- حدد معادلة ديكارتية للمستوى (Q'') المار من B و الموازي للمستوى (P)

في فضاء منسوب إلى معلم متعامد ممنظم.
 نعتبر المستوى (P) ذا المعادلة $3x+2y-z-5=0$ و (D) المستقيم المعرف بـ

$$\begin{cases} x-2y+z-3=0 \\ x-y-z+2=0 \end{cases}$$

- 1- حدد تمثيلا بارا متريا للمستقيم (D)
 حدد معادلة ديكارتية للمستوى (P') الذي يتضمن (D) و العمودي على (P)

La sphère الفلكة

I- الفلكة المعرفة بمركزها وشعاعها.

تعريف :

لتكن A نقطة من الفضاء ξ و R عدد حقيقي.
 الفلكة التي مركزها A وشعاعها R هي مجموعة النقط M حيث : $AM = R$.
 ونرمز لها بـ : $S(A, R)$

$$S(A, R) = \{M \in \xi / AM = R\}$$

معادلة فلكة :

(1) معادلة فلكة معرفة بمركزها وشعاعها :

الفضاء ξ منسوب إلى معلم متعامد ممنظم $(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$.

لتكن : $S(\Omega, R)$ فلكة مركزها $\Omega(x_0, y_0, z_0)$ وشعاعها R حيث $R > 0$.
 لدينا : $M(x, y, z) \in S(\Omega, R) \Leftrightarrow \Omega M = R$

$$\Leftrightarrow \sqrt{(x-x_0)^2 + (y-y_0)^2 + (z-z_0)^2} = R$$

$$\Leftrightarrow (x-x_0)^2 + (y-y_0)^2 + (z-z_0)^2 = R^2$$

وهذه المعادلة هي معادلة ديكارتية للفلكة $S(\Omega, R)$

أمثلة :

$$(1) \quad R=2, \quad \Omega(3,0,1)$$

$$S_1 : (x-3)^2 + (y)^2 + (z-1)^2 = 4$$

$$(2) \quad R=1, \quad \Omega(1,2,-3)$$

$$S_2 : (x-1)^2 + (y-2)^2 + (z+3)^2 = 1$$

$$(3) \quad (x+\sqrt{2})^2 + (y-1)^2 + \left(z-\frac{1}{2}\right)^2 = 2$$

$$S_1 \text{ هي فلكة مركزها } \Omega\left(-\sqrt{2}, 1, \frac{1}{2}\right) \text{ وشعاعها } R=\sqrt{2}.$$

$$(4) \quad R=1 \quad \text{و} \quad \Omega(0,0,0)$$

$$S_4 : x^2 + y^2 + z^2 = 1$$

(2) معادلة فلكة معرفة بأحد أقطارها.

لتكن A و B نقطتين مختلفتين من الفضاء ξ .

توجد فلكة وحيدة S أحد أقطارها $[AB]$.

لتكن S فلكة أحد أقطارها هو $[AB]$.

$$M \in S \Leftrightarrow \overrightarrow{AM} \cdot \overrightarrow{BM} = 0$$

$$\text{لتكن : } A(x_A, y_A, z_A) \quad \text{و} \quad B(x_B, y_B, z_B)$$

$$\text{و : } M(x, y, z)$$

و S فلكة أحد أقطارها هو $[AB]$.

$$M \in S \Leftrightarrow \overrightarrow{AM} \cdot \overrightarrow{BM} = 0 \quad \text{لدينا :}$$

$$\Leftrightarrow (x-x_A)(x-x_B) + (y-y_A)(y-y_B) + (z-z_A)(z-z_B) = 0$$

وهذه المعادلة هي معادلة ديكارتية للفلكة S التي أحد أقطارها هو $[AB]$.

ملاحظة :

$$\text{إذا كان } [AB] \text{ قطر للفلكة } S \text{ فإن منتصف } [AB] \text{ هو مركزها وشعاعها هو : } \frac{AB}{2}.$$

$$(E): x + y + z - 2ax - 2by - 2cz + d = 0 \quad \text{دراسة المعادلة : (3)}$$

$$(E) \Leftrightarrow (x-a)^2 + (y-b)^2 + (z-c)^2 = a^2 + b^2 + c^2 - d \quad \text{لدينا :}$$

$$\underline{a^2 + b^2 + c^2 - d < 0} \quad \text{الحالة ① :}$$

$$S = \emptyset$$

$$\underline{a^2 + b^2 + c^2 - d = 0} \quad \text{الحالة ② :}$$

$$S = \{\Omega(a, b, c)\}$$

$$\underline{a^2 + b^2 + c^2 - d > 0} \quad \text{الحالة ③ :}$$

$$R > 0 \quad \text{حيث} \quad R^2 = a^2 + b^2 + c^2 - d \quad \text{نضع :}$$

$$R = \sqrt{a^2 + b^2 + c^2 - d}$$

$$S = S(\Omega(a, b, c), R)$$

مثال :

$$(E): x^2 + y^2 + z^2 - 2y + z - 3 = 0$$

ط1 :

$$a = 0 \quad \text{لدينا :}$$

$$b = 1$$

$$c = -\frac{1}{2}$$

$$d = -3$$

$$a^2 + b^2 + c^2 - d = 1 + \frac{1}{4} + 3 = \frac{17}{4} > 0 \quad \text{إذن :}$$

$$\text{إذن : } S \text{ فلكة مركزها : } \Omega\left(0, 1, -\frac{1}{2}\right) \text{ وشعاعها } R = \frac{\sqrt{17}}{2}.$$

ط2 :

$$(E): x^2 + (y-1)^2 + \left(z + \frac{1}{2}\right)^2 = 1 + \frac{1}{4} + 3 \quad \text{لدينا :}$$

$$x^2 + (y-1)^2 + \left(z + \frac{1}{2}\right)^2 = \frac{17}{4} \Leftrightarrow$$

$$S = S\left(\Omega\left(0, 1, -\frac{1}{2}\right), \frac{\sqrt{17}}{2}\right)$$

II- تقاطع فلكة ومستوى : الوضع النسبي لمستوى وفلكة :

ليكن P مستوى و S فلكة مركزها Ω وشعاعها R .
لدراسة الوضع النسبي للمستوى P والفلكة S ،
نحسب المسافة d بين (P) و Ω .
 $d = d(\Omega, (P))$

الحالة ① : $d(\Omega, (P)) > R$

$$S \cap P = \emptyset$$

الحالة ② : $d(\Omega, (P)) = R$

$$(S) \cap (P) = \{H\}$$

بحيث H هي المسقط العمودي للنقطة Ω على (P) .
في هذه الحالة نقول ان المستوى (P) مماس للفلكة (S) .

الحالة ③ : $d(\Omega, (P)) < R$

في هذه الحالة تقاطع (S) و (P) هو دائرة ℓ مركزها H .

(حيث H هو المسقط العمودي للنقطة Ω على (P)) . وشعاعها r حيث : $r = \sqrt{R^2 - d^2}$

علما أن : $d = d(\Omega, (P)) = \Omega H$

مثال :

$$(P): 2x - y + z + 1 = 0$$

$$S\{\Omega, 2\}$$

و :

$$\Omega(1, -1, 1)$$

حيث :

$$d(\Omega, (P)) = \frac{|2+1+1+1|}{\sqrt{4+1+1}}$$

لدينا :

$$= \frac{5}{\sqrt{6}} = \frac{5\sqrt{6}}{6} > 2$$

$$S \cap P = \emptyset$$

إذن :

معادلة المستوى المماس للفلكة في نقطة معينة.

لتكن A نقطة من الفلكة S ذات المركز Ω والشعاع R .
وليكن (P) المستوى المماس للفلكة S في A .

$$M \in P \Leftrightarrow \overrightarrow{A\Omega} \cdot \overrightarrow{AM} = 0$$

لدينا :

ملاحظة :

$$\overrightarrow{\Omega A} \text{ منظمية على } (P).$$

مثال :

$$(S) \text{ فلكة معادلتها : } x^2 + y^2 + z^2 - 2x + 2y - 2 = 0$$

$$A(1, 1, 0)$$

و :

حدد معادلة المستوى المماس للفلكة S في A .

$$A \in S$$

لدينا :

$$M \in (P) \Leftrightarrow \overrightarrow{A\Omega} \cdot \overrightarrow{AM} = 0$$

إذن :

$$\Omega(1, -1, 0)$$

وبمأن :

$$A(1, 1, 0)$$

$$M(x, y, z)$$

$$\overrightarrow{A\Omega}(0, -2, 0)$$

فإن :

$$\overrightarrow{AM}(x-1, y-1, z)$$

$$-2(y-1) = 0$$

إذن :

ومنه : $y=1$ هي معادلة المستوى المماس للكرة S في النقطة A .

III- تقاطع كرة ومستقيم :

مثال 1 :

أدرس تقاطع الكرة S والمستقيم (D) .

$$(S): x^2 + y^2 + z^2 - 3x + 2y - 4z - 5 = 0 \quad \text{حيث :}$$

$$(D): \begin{cases} x = t \\ y = t+1 \\ z = 2 \end{cases} \quad (t \in \mathbb{R}) \quad \text{و :}$$

لدراسة تقاطع الكرة (S) والمستقيم (D) ،

$$\begin{cases} x = t \\ y = t+1 \\ z = 2 \\ x^2 + y^2 + z^2 - 3x + 2y - 4z - 5 = 0 \end{cases} \quad (t \in \mathbb{R}) \quad \text{نحل النظام :}$$

الجواب :

$$t^2 + (t+1)^2 + 4 - 3t + 2(t+1) - 8 - 5 = 0$$

$$2t^2 + t - 6 = 0$$

$$\Delta = 1 - 4(2) \times (-6)$$

لنحل المعادلة :

$$= 49 > 0$$

$$t_1 = \frac{-1-7}{4} = -2$$

إذن :

$$t_2 = \frac{-1+7}{4} = \frac{3}{2}$$

ومنه تقاطع الكرة S والمستقيم (D) هي النقطتين : $A(-2, -1, 2)$

$$.B\left(\frac{3}{2}, \frac{5}{2}, 2\right)$$

و :

مثال 2 :

أدرس الوضع النسبي للمستقيم (D) والكرة (S) .

$$(S): (x-1)^2 + (y+1)^2 + z^2 = -4 \quad \text{حيث :}$$

$$(D): \begin{cases} x = t+1 \\ y = -1+2t \\ z = t \end{cases} \quad (t \in \mathbb{R})$$

الجواب :

$$(1+t-1)^2 + (-1+2t+1)^2 + t^2 = -4$$

$$t^2 + 4t^2 + t^2 = -4$$

$$6t^2 = -4$$

$$6t^2 + 4 = 0$$

$$\Delta = -96 < 0$$

$$(S) \cap (D) = \emptyset$$

ومنه :

- تمرين** في فضاء منسوب إلى معلم متعامد ممنظم $(O; i; j; k)$ ، نعتبر S_1 الفلكة التي معادلتها $x^2+y^2+z^2-4x+2y-2z-3=0$ و S_2 الفلكة التي مركزها Ω_2 و شعاعها 2، و (P) المستوى الذي معادلته $x-2y+z+1=0$ و (P') المستوى الذي معادلته $2x-y-2z-1=0$.
- 1- تأكد أن (P) و S_1 يتقاطعان وفق دائرة محددا عناصرها المميزة.
 - 2- أدرس تقاطع (P') و S_2 .
 - 3- حدد معادلة المستوى المماس للفلكة S_1 عند النقطة $A(1;1;3)$

إجابة

$$S_1 : (x-2)^2+(y+1)^2+(z-1)^2=9 \quad \text{اذن} \quad S_1 = S(\Omega_1;3) \quad \text{حيث} \quad \Omega_1(2;-1;1)$$

$$d(\Omega_1; (P)) = \frac{|2+2+1+1|}{\sqrt{1+4+1}} = \sqrt{6} < 3$$

(P) و S_1 يتقاطعان وفق دائرة مركزها B مسقط العمودي لـ Ω_1 على (P) و شعاعها $\sqrt{9-6}=\sqrt{3}$
 B هو تقاطع المستوى (P) و المستقيم (D) المار من Ω_1 و العمودي على (P)
 لدينا $\vec{n}(1;-2;1)$ منظمية على (P) و منه موجهة لـ (D) و بالتالي التمثيل البارامترى لـ (D) هو

$$\begin{cases} x = 2+t \\ y = -1-2t \\ z = 1+t \end{cases} \quad t \in \mathbb{R}$$

$$B \in (P) \cap (D) \Leftrightarrow \begin{cases} x-2y+z+1=0 \\ x=2+t \\ y=-1-2t \\ z=1+t \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} t=-1 \\ x=1 \\ y=1 \\ z=0 \end{cases}$$

2- لدينا $d(\Omega_2; (P'))=2$ ومنه تقاطع S_2 و (P') هو النقطة C باتباع نفس الخطوات السابقة نحدد النقطة

3- لدينا $A \in S_1$ ليكن (P') مماس لـ S_1 عند A

$$M(x;y;z) \in (P') \Leftrightarrow \overrightarrow{AM} \cdot \overrightarrow{\Omega_1 A} = 0 \Leftrightarrow \dots\dots\dots$$

تمرين 1

في فضاء منسوب إلى معلم متعامد ممنظم $(O; \vec{i}; \vec{j}; \vec{k})$

- نعتبر $A(1;0;1)$ و $B(0;0;1)$ و $C(0;-1;1)$ و المستقيم (D) المار من C والموجه بـ $\vec{u}(-1;2;1)$
- 1- بين أن مجموعة النقط M حيث $MA=MB=MC$ مستقيم وحدد تمثيلا بارامتريا له
 - 2- حدد معادلة ديكارتية للمستوى (P) العمودي على (D) في C
 - 3- استنتج معادلة ديكارتية للفلكة S المارة من A و B و المماس لـ (D) في C

تمرين 2

في فضاء منسوب إلى معلم متعامد ممنظم $(O; \vec{i}; \vec{j}; \vec{k})$ نعتبر $A(0;3;-5)$ و $B(0;7;-3)$ و $C(1;5;-3)$

- 1- أعط معادلة ديكارتية للمستوى (ABC)
- 2- أعط معادلة ديكارتية للمستوى (Q) المار من A حيث $\vec{u}(-1;2;1)$ منظمية عليه
- 3- ليكن (P) المستوى المحدد بالمعادلة $x+y+z=0$
 أ- تأكد أن (P) و (ABC) يتقاطعان وفق مستقيم (D)
 ب- حدد تمثيلا بارامتريا لـ (D)
- 4- نعتبر في الفضاء الدائرة (C) التي المحددة بـ $\begin{cases} x^2+z^2+10z+9=0 \\ y=0 \end{cases}$
 أ- حدد معادلة للفلكة S التي تتضمن الدائرة (C) و ينتمي مركزها إلى (ABC)
 ب- حدد تقاطع S و (AC)

في فضاء منسوب إلى معلم متعامد ممنظم مباشر نعتبر $A(1;-1;1)$ و $B(3;1;-1)$ و (P) المستوى ذا المعادلة $2x-3y+2z=0$ (D) المستقيم الممثل بارامتريا بـ

$$\begin{cases} x = 3t \\ x = -2 - 3t \quad t \in \mathbb{R} \\ z = 2 + 4t \end{cases}$$

- 1- حدد معادلة ديكارتية للمستوى (Q) المار من A و B والعمودي على المستقيم (D)
- 2- حدد معادلة ديكارتية للمستوى (Q') المار من A و B والعمودي على المستوى (P)
- 3- أحسب $d(A;(P))$ و $d(A;(D))$
- 4- حدد معادلة ديكارتية للمستوى (Q'') المار من B و الموازي للمستوى (P)

تمرين 4

في فضاء منسوب إلى معلم متعامد ممنظم نعتبر المستوى (P) ذا المعادلة $3x+2y-z-5=0$ و (D) المستقيم المعروف بـ

$$\begin{cases} x-2y+z-3=0 \\ x-y-z+2=0 \end{cases}$$

- 1- حدد تمثيلا بارامتريا للمستقيم (D)
- 2- حدد معادلة ديكارتية للمستوى (P') الذي يتضمن (D) و العمودي على (P).

تمرين 5

في فضاء منسوب إلى معلم متعامد ممنظم نعتبر المستوى (P) ذا المعادلة $x+y+z+1=0$ و المستوى (Q) ذا المعادلة $2x-2y-5=0$ و مجموعة النقط $M(x;y;z)$ التي تحقق $x^2+y^2+z^2-2x+4y+6z+11=0$

- 1- بين أن (S) فلكة محددا مركزها و شعاعها
- 2- تأكد أن (P) مماس للفلكة و حدد تقاطعها
- 3- حدد تمثيلا بارامتريا للمستقيم (D) المار من $A(0;1;2)$ و العمودي على (P)
- 4- تحقق أن $(P) \perp (Q)$ و أعط تمثيلا بارامتريا للمستقيم (D') تقاطع (P) و (Q)

تمرين 6

في فضاء منسوب إلى معلم متعامد ممنظم نعتبر النقطة $A(-2;3;4)$ المستوى (P) ذا المعادلة $x+2y-2z+15=0$ (S) مجموعة النقط $M(x;y;z)$ التي تحقق

$$\begin{cases} x^2 + y^2 - 2x - 8 = 0 \\ z = 0 \end{cases} \quad \text{و (C) الدائرة التي معادلتها}$$

- 1- بين أن (S) فلكة محددا عناصرها المميزة
- 2- بين أن (P) و (S) يتقاطعان وفق دائرة كبرى (C') و حدها
- 3- حدد معادلتين المستويين المماسين للفلكة (S) و الموازيين لـ (P)
- 4- أكتب معادلة الفلكة (S') المار من A المتضمن للدائرة (C)

الجداء المتجهي

Produit vectoriel

توجيه الفضاء

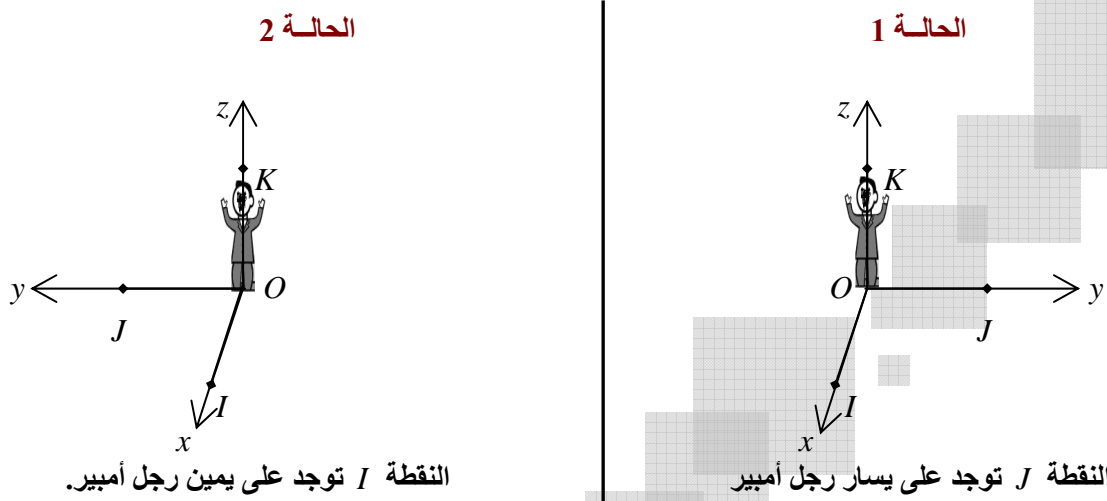
1- المعلم الموجه في الفضاء.

Repère orienté dans l'espace

ليكن $(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ معلما للفضاء \mathcal{E} ، ولتكن I و J و K ثلاث نقط من \mathcal{E} .

بحيث: $\vec{k} = \overrightarrow{OK}$ ، $\vec{j} = \overrightarrow{OJ}$ ، $\vec{i} = \overrightarrow{OI}$

رجل أمبير هو رجل خيالي، رجلاه في O ورأسه في K وينظر في اتجاه النقطة I .
إذن لدينا حالتين:



إذا كانت J على يسار رجل أمبير، نقول أن المعلم $(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ مباشر.

وإذا كانت J على يمين رجل أمبير، نقول أن المعلم $(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ غير مباشر.

أمثلة:

نفترض أن المعلم $(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ مباشر.

إذن: المعلم $(O, \vec{j}, \vec{k}, \vec{i})$ مباشر.

المعلم $(O, \vec{k}, \vec{i}, \vec{j})$ مباشر.

المعلم $(O, \vec{j}, \vec{i}, \vec{k})$ غير مباشر.

ملاحظة:

إذا كان المعلم $(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ مباشر.

فإن: الأساس $(\vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ مباشر.

2- توجيه مستوى في الفضاء.

ليكن (P) مستوى في الفضاء \mathcal{E} و \vec{k} متجهة واحدة منظمية على (P) .

لتكن O نقطة من (P) .



يمكن إنشاء معلم $(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ مباشر، بحيث \vec{k} و \vec{j} متجهتان موجهتان للمستوى (P) .

ملاحظة :

يتم توجيه المستوى بتوجيه متجهة منظمة عليه.

II- الجداء المتجهي.

تعريف :

لتكن \vec{u} و \vec{v} متجهتين من V_3 و A و B نقطتان من \mathcal{E} بحيث : $\vec{OA} = \vec{u}$ و $\vec{OB} = \vec{v}$.
الجداء المتجهي للمتجهتين \vec{u} و \vec{v} من هذا الترتيب هو المتجهة التي نرمز لها بـ : $\vec{u} \wedge \vec{v}$ والمعرفة كما يلي :

- إذا كانت \vec{u} و \vec{v} مستقيمتين $\vec{u} \wedge \vec{v} = \vec{0}$.
- إذا كانت \vec{u} و \vec{v} غير مستقيمتين :
- المتجهة $\vec{w} = \vec{u} \wedge \vec{v}$ تحقق $\vec{w} \perp \vec{u}$ و $\vec{w} \perp \vec{v}$
- $(\vec{u}, \vec{v}, \vec{w})$ أساس مباشر.

$$- \quad \|\vec{u} \wedge \vec{v}\| = \|\vec{u}\| \cdot \|\vec{v}\| \cdot \sin \theta \quad / \quad \text{حيث } \theta \text{ قياس الزاوية } [A\hat{O}B]$$

أمثلة :

نفترض أن المعلم $(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ معلما متعامدا منظمًا مباشرًا.

$$\begin{aligned} \vec{j} \wedge \vec{i} &= -\vec{k} & \vec{i} \wedge \vec{j} &= \vec{k} \\ \vec{k} \wedge \vec{j} &= -\vec{i} & \vec{j} \wedge \vec{k} &= \vec{i} \\ \vec{i} \wedge \vec{k} &= -\vec{j} & \vec{k} \wedge \vec{i} &= \vec{j} \end{aligned}$$

تطبيق :

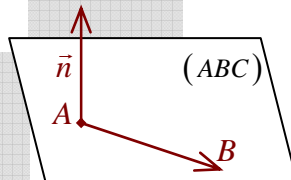
$$\|\vec{u} \wedge \vec{v}\|^2 + (\vec{u} \cdot \vec{v})^2 = \|\vec{u}\|^2 \cdot \|\vec{v}\|^2$$

بين أن :

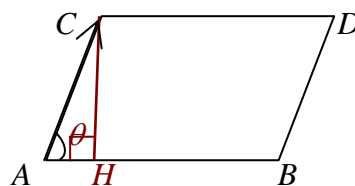
$$\begin{aligned} \|\vec{u} \wedge \vec{v}\|^2 + (\vec{u} \cdot \vec{v})^2 &= \|\vec{u}\|^2 \cdot \|\vec{v}\|^2 \cdot \sin^2 \theta + \|\vec{u}\|^2 \cdot \|\vec{v}\|^2 \cdot \cos^2 \theta \\ &= \|\vec{u}\|^2 \cdot \|\vec{v}\|^2 \end{aligned}$$

خصائص :

(1) إذا كانت A ، B و C ثلاث نقط غير مستقيمة فإن المتجهة $\vec{AB} \wedge \vec{AC}$ منتظمة على المستوى (ABC) .



(2) ليكن θ قياسا للزاوية $[B\hat{A}C]$.



$$\sin \theta = \frac{CH}{AC}$$

لدينا :

$$CH = AC \sin \theta$$

إذن :

$$\|\vec{AB} \wedge \vec{AC}\| = AB \cdot CH$$

إذن :

استنتاج :

العدد $\|\vec{AB} \wedge \vec{AC}\|$ هو مساحة متوازي الأضلاع المنشأ على القطعتين $[AB]$ و $[AC]$.

خاصية :

مساحة المثلث ABC هي العدد : $\frac{1}{2} \|\vec{AB} \wedge \vec{AC}\|$

(3) يكون \vec{u} و \vec{v} مستقيمتين إذا وفقط إذا كان : $\vec{u} \wedge \vec{v} = \vec{0}$

(4) الجداء المتجهي والعمليات :

لتكن \vec{u} ، \vec{v} و \vec{w} ثلاث متجهات و α عدد حقيقي.

$$\vec{v} \wedge \vec{u} = -\vec{u} \wedge \vec{v} \quad \bullet$$

$$(\alpha \vec{u}) \wedge \vec{v} = \vec{u} \wedge \alpha \vec{v} = \alpha (\vec{u} \wedge \vec{v}) \quad \bullet$$

$$\vec{u} \wedge (\vec{v} + \vec{w}) = \vec{u} \wedge \vec{v} + \vec{u} \wedge \vec{w} \quad \bullet$$

III- الصيغة التحليلية للجداء المتجهي في معلم متعامد ممنظم مباشر.

L'expression analytique du produit vectoriel dans un repère orthonormé direct.

$$\vec{u}(x, y, z) \text{ و } \vec{v}(x', y', z')$$

نعتبر المتجهتان

$$\vec{u} \wedge \vec{v} = (x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}) \wedge (x'\vec{i} + y'\vec{j} + z'\vec{k}) \quad \text{لدينا :}$$

$$= xy'\vec{k} - xz'\vec{j} - yx'\vec{k} + yz'\vec{i} + zx'\vec{j} - zy'\vec{i}$$

$$= (yz' - zy')\vec{i} - (xz' - x'z)\vec{j} + (xy' - x'y)\vec{k}$$

$$= \begin{vmatrix} y & y' \\ z & z' \end{vmatrix} \vec{i} - \begin{vmatrix} x & x' \\ z & z' \end{vmatrix} \vec{j} + \begin{vmatrix} x & x' \\ y & y' \end{vmatrix} \vec{k}$$

استنتاج :

$$\vec{u} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \wedge \vec{v} \begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix} = \vec{u} \wedge \vec{v} \cdot \begin{pmatrix} y & y' \\ z & z' \\ z & z' \\ x & x' \\ x & x' \\ y & y' \end{pmatrix}$$

أمثلة :

$$\vec{u}(1, 2, 1) \text{ و } \vec{v}(-1, 0, 1)$$

(1)

$$\vec{u} \wedge \vec{v} = \begin{vmatrix} 2 & 0 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} \vec{i} - \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} \vec{j} + \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 0 \end{vmatrix} \vec{k}$$

$$= 2\vec{i} - 2\vec{j} + 2\vec{k}$$

لدينا :

$$A(1, 0, 1) \text{ ، } B(0, 1, 1) \text{ ، } C(1, 1, 0)$$

(2)

$$\overrightarrow{AB} \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \text{ و } \overrightarrow{AC} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$$

لدينا :

$$\overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{AC} = \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 0 & -1 \end{vmatrix} \vec{i} - \begin{vmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{vmatrix} \vec{j} + \begin{vmatrix} -1 & 0 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} \vec{k}$$

$$= -\vec{i} - \vec{j} - \vec{k}$$

إن :

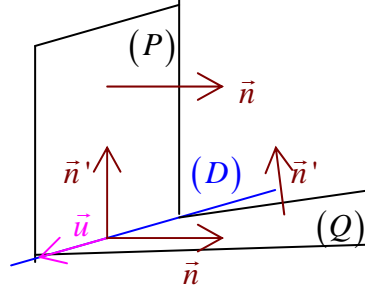
$$\|\overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{AC}\| = \sqrt{3}$$

إن :

ومنه : $\frac{\sqrt{3}}{2}$ (وحدة القياس) هي مساحة المثلث ABC.

-IV- تطبيقات الجداء المتجهي.

- 1- حساب مساحة المثلث.
- 2- معادلة مستوى معرف بـ 3 نقط غير مستقيمة.
- المتجهة $\overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{AC}$ منظمية على المستوى (ABC) .
- 3- تقاطع مستويين.
- لتكن \vec{n} منظمية على (P) و \vec{n}' منظمية على (Q) .



إذا كانت \vec{n} و \vec{n}' غير مستقيمتين،
فإن المتجهة $\vec{u} = \vec{n} \wedge \vec{n}'$ هي متجهة موجهة للمستقيم (D) تقاطع (P) و (Q) .

4- مسافة نقطة عن مستقيم.

ليكن $D(A, \vec{u})$ مستقيما في الفضاء \mathcal{E} المنسوب إلى م.م $(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$.
ولتكن B نقطة من الفضاء \mathcal{E} ، و H المسقط العمودي لـ B على (D) .

$$\overrightarrow{AB} \wedge \vec{u} = (\overrightarrow{AH} + \overrightarrow{HB}) \wedge \vec{u} \quad \text{لدينا :}$$

$$= \overrightarrow{HB} \wedge \vec{u}$$

$$\|\overrightarrow{AB} \wedge \vec{u}\| = \|\overrightarrow{HB} \wedge \vec{u}\| \quad \text{إذن :}$$

$$= \overrightarrow{HB} \cdot \|\vec{u}\|$$

$$\overrightarrow{HB} = \frac{\|\overrightarrow{AB} \wedge \vec{u}\|}{\|\vec{u}\|} \quad \text{إذن :}$$

$$d(B, (D)) = \frac{\|\overrightarrow{AB} \wedge \vec{u}\|}{\|\vec{u}\|} \quad \text{إذن :}$$

خاصية :

الفضاء \mathcal{E} منسوب إلى معلم م.م.

مسافة النقطة B عن المستقيم $D(A, \vec{u})$ هي :

$$d(B, (D)) = \frac{\|\overrightarrow{AB} \wedge \vec{u}\|}{\|\vec{u}\|}$$

مثال :

$$A(2, 1, 0)$$

$$D : \begin{cases} x = t \\ y = 1 + t \\ z = -t \end{cases} \quad t \in \mathbb{R} \quad \text{و}$$

لنحسب $d(A, (D))$

لدينا : $C(0, 1, 0) \in (D)$

و : $\vec{u}(1, 1, -1)$ متجهة موجهة لـ (D) .

$$d(A, (D)) = \frac{\|\overrightarrow{CA} \wedge \vec{u}\|}{\|\vec{u}\|} \quad \text{إذن :}$$

$$\overrightarrow{CA} \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \text{و} \quad \vec{u} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} \quad \text{وبما أن :}$$

$$\overrightarrow{CA} \wedge \vec{u} = \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 0 & -1 \end{vmatrix} \vec{i} - \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 0 & -1 \end{vmatrix} \vec{j} + \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} \vec{k} \quad \text{فإن :}$$

$$= 2\vec{j} + 2\vec{k} \quad \text{و :}$$

$$\|\overrightarrow{CA} \wedge \vec{u}\| = \sqrt{8} \quad \text{إذن :}$$

$$\|\vec{u}\| = \sqrt{3} \quad \text{و :}$$

$$d(A, (D)) = \sqrt{\frac{8}{3}} \quad \text{إذن :}$$

تمرين تطبيقي :

تمرين 5 (سلسلة الهندسة الفضائية) :

-1 -a لدينا : $A(-3, 0, 0)$ ، $B(-1, 0, -1)$ ، $C(-1, 1, 0)$ و $\Omega(1, -1, 0)$.

لنحسب :

$$\overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{AC} \quad \text{لدينا :}$$

$$\overrightarrow{AB} \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} \quad \text{و} \quad \overrightarrow{AC} \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{AC} = \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{vmatrix} \vec{i} - \begin{vmatrix} -1 & 0 \\ 2 & 2 \end{vmatrix} \vec{j} + \begin{vmatrix} 2 & 2 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} \vec{k} \quad \text{إذن :}$$

$$= \vec{i} - 2\vec{j} + 2\vec{k}$$

$$\overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{AC} = \vec{i} - 2\vec{j} + 2\vec{k} \quad \text{بما أن :}$$

فإن معادلة المستوى (ABC) تكتب على شكل $x - 2y + 2z + d = 0$.

-b وبما أن : $A \in (ABC)$

$$-3 + 0 + 0 + d = 0 \quad \text{فإن :}$$

$$d = 3 \quad \text{إذن :}$$

ومنه : $x - 2y + 2z + 3 = 0$ معادلة ديكارتية للمستوى (ABC) .

-2 -a لدينا :

$$(S) : (x-1)^2 + (y+1)^2 + z^2 = 4$$

$$d(\Omega, (ABC)) = \frac{|1 + 2 + 3|}{\sqrt{1 + 4 + 4}} \quad \text{-b لدينا :}$$

$$= 2 = R$$

إذن : (ABC) مماس للكرة (S) .

-3 -a لدينا : $(Q) : 2x + 2y + z + 3 = 0$

$$d(\Omega, (Q)) = \frac{|2 - 2 + 3|}{\sqrt{4 + 4 + 1}} \quad \text{إذن :}$$

إذن : (Q) متقاطع مع (S) وفق دائرة.

$$(2 \times 1) + (2 \times (-2)) + (1 \times 2) = 2 - 4 + 2 = 0 \quad \text{-b لدينا :}$$

إذن : $(ABC) \perp (Q)$

-c لدينا : (D) يمر من Ω و $(D) \perp (Q)$.

إذن : $(D) : \begin{cases} x = 1 + 2t \\ y = -1 + 2t \\ z = t \end{cases} \quad t \in \mathbb{R}$

-d مركز الدائرة هو النقطة W تقاطع (D) و (Q) .
لنحل النظام :

$$\begin{cases} x = 1 + 2t \\ y = -1 + 2t \\ z = t \\ 2x + 2y + z + 3 = 0 \end{cases}$$

إذن :

$$2(1 + 2t) + 2(-1 + 2t) + t + 3 = 0$$

$$9t + 3 = 0$$

$$t = -\frac{1}{3}$$

ومنه : $W\left(\frac{1}{3}, -\frac{5}{3}, -\frac{1}{3}\right)$ مركز الدائرة (ℓ) .

وبما أن : $2^2 = 4 = \Omega W^2 + r^2$

فإن : $r^2 = 4 - 1$

$$r^2 = 3$$

إذن : $r = \sqrt{3}$

تمرين :

لدينا : $A(1, 0, 0)$ ، $B(0, 2, 1)$ ، $C(1, 2, 1)$.

1- أحسب الجداء $\overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{AC}$ واستنتج معادلة المستوى (ABC) .

2- لتكن (S) فلكة حيث تقاطعها مع المستوى (ABC) هو الدائرة المحيطة بالمثلث ABC .

a- بين أن O تنتمي إلى (S) .

b- حدد معادلة الفلكة (S) علما أن : $H(0, 0, 3) \in (S)$

3- ليكن (P) المستوى المماس للفلكة (S) في H .

حدد معادلة ديكارتية للمستوى (P) .

4- أحسب المسافة : $d(H, (AB))$

تمارين

تمرين 1

(معلم متعامد ممنظم مباشر . $(o; \vec{i}; \vec{j}; \vec{k})$)

$$\text{أحسب} \quad \vec{i} \wedge 3\vec{j} \quad (\vec{i} + 2\vec{k}) \wedge \vec{j} \quad (\vec{i} + \vec{j} - 2\vec{k}) \wedge \vec{k} \quad (2\vec{i} - \vec{j}) \wedge (3\vec{i} + 4\vec{j})$$

تمرين 2

$$\vec{a} \wedge \vec{c} = \vec{b} \wedge \vec{d} \quad ; \quad \vec{a} \wedge \vec{b} = \vec{c} \wedge \vec{d} \quad \text{لتكن}$$

بين إن $\vec{a} - \vec{d}$ و $\vec{b} - \vec{c}$ مسنقيمتان

تمرين 3

$$d(A; (D)) = ? \quad (D): \begin{cases} x = 2 - t \\ y = 2t \\ z = 1 + t \end{cases} \quad t \in \mathbb{R} \quad A(3; 2; -1)$$

تمرين 4

في فضاء منسوب إلى معلم متعامد ممنظم مباشر نعتبر $A(1; 2; 1)$ و $B(-2; 1; 3)$ و (D) المستقيم الذي

$$\begin{cases} x - 2y + z - 3 = 0 \\ 2x + 3y - z - 1 = 0 \end{cases} \quad \text{معادلته}$$

1- حدد $\overline{OA} \wedge \overline{OB}$ ثم حدد معادلة ديكارتية للمستوى (OAB)

2- حدد $d(A; (D))$

3- أعط معادلة ديكارتية للفلكة (S) التي مركزها A و مماسة للمستقيم (D)

تمرين

$$d(A; (D)) = ? \quad (D): \begin{cases} x = 2 - t \\ y = 2t \\ z = 1 + t \end{cases} \quad t \in \mathbb{R} \quad A(3; 2; -1)$$

تمرين

في فضاء منسوب إلى معلم متعامد ممنظم مباشر نعتبر $A(1; 2; 1)$ و $B(-2; 1; 3)$ و (D) المستقيم الذي

$$\begin{cases} x - 2y + z - 3 = 0 \\ 2x + 3y - z - 1 = 0 \end{cases} \quad \text{معادلته}$$

1- حدد $\overline{OA} \wedge \overline{OB}$ ثم حدد معادلة ديكارتية للمستوى (OAB)

2- حدد $d(A; (D))$

3- أعط معادلة ديكارتية للفلكة (S) التي مركزها A و مماسة للمستقيم (D)

التعداد Dénombrement

-I مبدأ الجداء
تمهيد :

(1) رمي قطعة نقدية :

(a) إذا رمينا قطعة نقدية فاننا نحصل اما على الوجه F أو على الظهر P . P=pile , F=Face
في هذه الحالة نقول أن لنا امكائيتين .

(b) و إذا رمينا القطعة النقدية مرتين فما هو عدد المكائيات الممكن الحصول عليها :

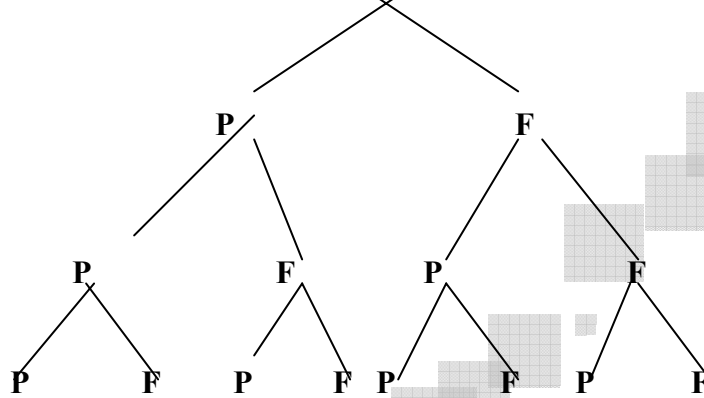
FF ; FP ; PF ; PP

(c) و إذا رمينا القطعة النقدية ثلاث مرات فما هو عدد الامكائيات الممكن الحصول عليها:

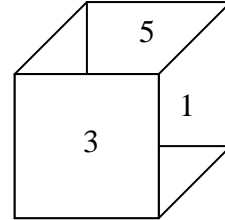
PPP ; PPF ; PFP ; FPP

FFP ; FPF ; PFF ; FFF

يمكن استعمال الشجرة " شجرة الامكائيات " على النحو التالي :



(2) رمي النرد:



النرد هو مكعب عادة تكون وجوهه الستة مرقمة من 1 الى 6 .

(a) إذا رمينا هذا النرد مرة واحدة و نسجل الرقم المحصل عليه بعد كل رمية فما هي النتائج الممكن المحصل عليها . الجواب : 1 , 2 , 3 , 4 , 5 , 6 .
لدينا إذا ستة إمكائيات .

(b) إذا قمنا برمي النرد مرتين و كنا نسجل الرقم المحصل عليه بعد كل رمية فما هي مجموعة جميع الامكائيات المتوقعة ؟

الجواب : { (1,1) , (1,2) , (1,3) , (1,4) , (1,5) , (1,6) , ... } . يمكن إعطاء جدول للنتائج .

(c) تظنن عدد جميع الإمكائيات إذا قمنا برمي النرد ثلاث مرات متتالية .

(3) تكوين أعداد

(a) لدينا 6 بيدقات تحمل الأرقام : 1 - 2 - 3 - 4 - 5 - 6

(a₁) ما هو عدد الأعداد المكونة من ثلاثة أرقام و الممكن تكوينها بواسطة البيدقات .

(a₂) ما هو عدد الأعداد المكونة من ستة أرقام و الممكن تكوينها بواسطة البيدقات .

(b) ما هو عدد الأعداد المكونة من ثلاثة أرقام .

ملاحظة : لعدد oxy يعتبر عدد مكون من رقمين فقط .

خلاصة : مبدأ الجداء

نعتبر p اختبار

إذا كان : الاختبار الأول يتم ب n_1 كيفية مختلفة

الاختبار الثاني يتم ب n_2 كيفية مختلفة

الاختبار p يتم ب n_p كيفية مختلفة

فإن عدد الكيفيات التي تم بها هذا الاختبار هو : $n_1 \times n_2 \times \dots \times n_p$

تطبيقات:

- 1- صندوق يحتوي على 3 كرات بيضاء و 5 كرات سوداء
 - (a) نسحب من الصندوق 3 كرات واحدة تلو الأخرى و لا نعيد الكرة المسحوبة الى الصندوق
 - (a₁) أعط عدد جميع السحبات الممكنة
 - (a₂) أعط عدد السحبات التي تكون فيها جميع الكرات بيضاء.
 - (a₃) أعط عدد السحبات التي تكون فيها جميع الكرات سوداء.
 - (a₄) أعط عدد السحبات التي تكون فيها جميع الكرات لها نفس اللون.
 - (b) نفس الأسئلة علما أننا نعيد الكرة المسحوب إلى الصندوق قبل سحب الأخرى وهكذا.
- 2- كيس يحتوي على 5 بيدات تحمل الأرقام 0 - 1 - 2 - 3 - 4 . نسحب بيدقتين بالتتابع.
 - إذا كانت البيدة الأولى تحمل رقما فرديا نعيدها إلى الكيس ثم نسحب الثانية
 - و إذا كانت البيدة الأولى تحمل رقما زوجيا لا نعيدها إلى الكيس ثم نسحب الثانية
 - (a) ما هو عدد جميع الإمكانيات
 - (b) ما هو عدد إمكانيات الحصول على بيدقتين يحملن رقما فرديا
 - (c) ما هو عدد إمكانيات الحصول على بيدقتين يحملن رقما زوجي

II- الترتيبات : Les arrangement

تمهيد :

- 1- في قاعة انتظار إحدى العيادات يوجد 10 كراسي و 3 مرضى . بكم من طريقة يمكن للمرضى الثلاث أن يجلسوا.
- 2- أربعة أطفال دخلوا إلى قاعة للمطالعة فوجدوا 5 طاولات. بكم من طريقة يمكن للأطفال أن يجلسوا (كل طاولة لا تسع إلا لطفل على الأكثر)
- 3- قسم يحتوي على 42 تلميذ . بكم من طريقة يمكن اختيار ثلاث تلاميذ واحد تلو الآخر من هذا القسم .

تعريف:

كل ترتيب ل p عنصر من بين n عنصر ($p \leq n$) يسمى يسمى ترتيبه ل p عنصر من بين n

عدد الترتيبات :

تمهيد :

مجموعة تتكون من n عنصر .
 نريد اختيار p عنصر من بين n بالتتابع
 لاختيار العنصر الأول لدينا n طريقة
 و لاختيار العنصر الثاني لدينا $(n-1)$ طريقة
 و لاختيار العنصر p^{th} لدينا $(n-p+1)$ طريقة.
 وحسب مبدأ الجداء لدينا : $(n-p+1) \dots (n-1) \dots n$ طريقة مختلفة لاختيار p عنصر من بين n .

مبرهنة :

عدد الترتيبات ل p عنصر من بين n هو $(n-p+1) \dots (n-1) \dots n$ ونرمز له ب A_n^p

$$A_n^p = n(n-1) \dots (n-p+1)$$

مثال : A_5^1 , A_6^2 , A_5^3

تعريف :

كل ترتيبية لـ n عنصر من بين n تسمى تبديلة لـ n عنصر
عدد التباديل :

عدد التباديل لـ n عنصر هو العدد A_n^n

$$n(n-1)..... \times 2 \times 1$$

و نرمز له بـ : $n!$. و نقرأ n عاملي أو n factoriel .

$$n! = n(n-1)..... \times 2 \times 1$$

اصطلاح : $0! = 1$

$$5! = 120 \quad 63! = \text{مثال}$$

ملاحظة هامة :

$$A_n^p = n(n-1).....(n-p+1)$$

$$A_n^p = n(n-1).....(n-p+1)$$

$$= \frac{n(n-1)....(n-p+1)(n-p)!}{(n-p)!} = \frac{n!}{(n-p)!}$$

$$A_n^p = \frac{n!}{(n-p)!}$$

$$= \frac{n(n-1)....(n-p+1)(n-p)!}{(n-p)!} = \frac{n!}{(n-p)!}$$

$$A_n^p = \frac{n!}{(n-p)!}$$

VI - التاليفات : Les combinaisons

تمهيد :

1- نعتبر المجموعة : $E = \{a, b, c, d\}$

جدد جميع أجزاء E

2- نريد اختيار شخصين ثانيا من بين 5 أشخاص
ما هو عدد الطرق لإجراء هذا الاختبار.

تعريف :

لتكن E مجموعة مكونة من n عنصر

كل جزء من E مكون من P عنصر ($p \leq n$) يسمى تاليفة لـ p عنصر من بين n

عدد التاليفات :

لتكن E مجموعة مكونة من n عنصر و ($p \leq n$)

إذا أردنا اختيار p عنصر بالتتابع و بدون إحلال من E فإن عدد جميع الإمكانيات هو A_n^p :

و ليكن N هو عدد التاليفات لـ p عنصر من بين n

نلاحظ أنه بالنسبة للتاليفات الترتيب غير مهم

اذن لكل تاليفة لـ p عنصر من بين n هناك $p!$ ترتيبية لـ p عنصر من بين n ومنه :

$$N = \frac{A_n^p}{p!} \quad \text{أي} \quad A_n^p = p!N$$

عدد التاليفات ل p عنصر من بين n ($p \leq n$) هو العدد $\frac{A_n^p}{p!}$ و الذي نرمز له ب : C_n^p

$$C_n^p = \frac{A_n^p}{p!}$$

$$C_n^p = \frac{n!}{p!(n-p)!}$$

تطبيقات:

1- أحسب : C_n^0 , C_n^1 , C_3^1 , C_4^2

2- بين أن : $C_n^{n-p} = C_n^p$

3- بين أن : $C_n^{p-1} + C_n^p = C_{n+1}^p$, $1 \leq p \leq n$

4- مثلث باسكال

5- صيغة الجذائية : $(a+b)^n = \sum_{p=0}^n C_n^p a^{n-p} b^p$

أمثلة : (1) أحسب : $(n+1)^5$

(2) بين أن : $C_n^0 + C_n^1 + C_n^2 + \dots + C_n^n = 2^n$

استنتج عدد أجزاء مجموعة تحتوي على n عنصر

خاصية : عدد أجزاء مجموعة تحتوي على n عنصر هو 2^n

$$\text{card}P(E) = 2^{\text{card}E}$$

(1) التجربة العشوائية Expérience aléatoire

مثال 1- يوجد في صندوق 8 كرات مرقمة من 1 إلى 8 .

a- نعتبر التجربة العشوائية التالية « سحب كرة واحدة من الصندوق ».

هناك عدة **إمكانات** **Eventualités**

مثلا يمكن سحب الكرة رقم 1 أو 2 أو ... أو 8

مجموعة الإمكانات هي $\Omega = \{1, 2, \dots, 8\}$

وعدد الإمكانات هو $\text{card}\Omega = C_8^1 = 8$

b- نعتبر التجربة العشوائية التالية « سحب كرتين من الصندوق ».

مجموعة الإمكانات Ω هي مجموعة الثنائيات : $i \neq j \mid \{i, j\}$ و $1 \leq i \leq 8$ و $1 \leq j \leq 8$

عدد عناصر Ω هو $\text{card}\Omega = C_8^2 = 28$

ملاحظة : * النتيجة $\{3, 4\}$ تحقق الحدث (Evénement) (مجموع النقط المحصل عليها 7).

ولدينا كذلك $\{1, 6\}$ و $\{2, 5\}$ نتائج تحقق نفس الحدث.

إذن من الممكن أن نمثل هذا الحدث بالجزء من Ω .

$$A = \{\{1, 6\}, \{2, 5\}, \{3, 4\}\}$$

* النتيجة $\{7, 6\}$ تحقق الحدث (مجموع النقط المحصل عليها أكبر من أو يساوي 13).

والجزء من Ω الممثل لهذا الحدث هو $B = \{\{6, 7\}, \{7, 8\}\}$

تعريف : الحدث هو كل جزء من Ω .

و Ω يسمى **كون** الإمكانات.

مثال 2- : " رمي قطعة نقدية في الهواء "

النتيجة المحصل عليها هي P أو F إذن $\Omega = \{P, F\}$

$$\text{card}\Omega = 2$$

(2) مصطلحات وتعريف.

1. كون الإمكانات

• كون الإمكانات هو مجموعة كل النتائج الممكنة (المحتملة). ونرمز له ب Ω .

• كل عنصر من Ω يسمى **إمكانية** (Eventualité)

2. الحدث

كل جزء من Ω يسمى حدث.

1-2. الحدث المستحيل : \emptyset . $\emptyset \subset \Omega$

\emptyset لا تحتوي على أي نتيجة، أي \emptyset لا يتحقق أ[دا.

\emptyset يسمى **الحدث المستحيل**.

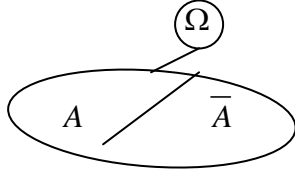
2-2. الحدث الأكيد : Ω . $\Omega \subset \Omega$

Ω يحتوي على كل النتائج الممكنة.

Ω هو **الحدث الأكيد**.

3-2. الحدث الابتدائي :

كل حدث مكون من عنصر واحد يسمى حدثا ابتدائيا.



4-2. الحدث المضاد :

الحدث المضاد للحدث A هو $C_{\Omega}^A = \bar{A}$

حيث $A \cap \bar{A} = \emptyset$ و $A \cup \bar{A} = \Omega$

5-2. تقاطع حدثين :

• تقاطع الحدثين A و B هو الحدث $A \cap B$

• يتحقق الحدث $A \cap B$ إذا وفقط إذا تحقق الحدثين A و B معا.

6-2. اتحاد حدثين :

• اتحاد الحدثين A و B هو الحدث $A \cup B$.

• يتحقق الحدث $A \cup B$ إذا وفقط إذا تحقق الحدث A أو الحدث B .

7-2. انسجام حدثين :

نقول إن الحدثين A و B غير منسجمين إذا وفقط إذا كان $A \cap B = \emptyset$.

مثال 1- : صندوق يحتوي على 10 كرات مرقمة من 1 إلى 10. نعتبر التجربة العشوائية « سحب كرة واحدة من الصندوق ».

لدينا $\Omega = \{\{i, j, k\} \mid i \neq j \text{ و } i \neq k \text{ و } j \neq k \text{ و } 1 \leq j \leq 10 \text{ و } 1 \leq i \leq 10 \text{ و } 1 \leq k \leq 10\}$

$$\text{card} \Omega = C_{10}^3 = 120$$

نعتبر الحدث A « الكرات المسحوبة من بينها رقم 1 ».

$$\text{card} A = C_1^1 C_9^2 = 36$$

$$A = \{\{1, j, k\} \mid j \neq k \text{ و } 2 \leq j \leq 10 \text{ و } 2 \leq k \leq 10\}$$

$$\bar{A} = \{\{i, j, k\} \mid i \neq j \text{ و } i \neq k \text{ و } j \neq k \text{ و } 2 \leq i \leq 10 \text{ و } 2 \leq j \leq 10 \text{ و } 2 \leq k \leq 10\}$$

$$\text{card} \bar{A} = \text{card} \Omega - \text{card} A = 120 - 36 = 84$$

نعتبر الحدث B « مجموع النقاط المحصل عليها أكبر من أو يساوي 9 ».

هل الحدثين A و B منسجمين ؟ (علل جوابك).

مثال 2- : نرمل وجه الستة مرقمة من 1 إلى 6.

كون الإمكانات هو $\Omega = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$

نعتبر الأحداث التالية :

A « الحصول على رقم قابل للقسمة على 5 ».

B « الحصول على رقم قابل للقسمة على 3 ».

C « الحصول على رقم زوجي ».

D « الحصول على رقم فردي ».

لدينا إذن $A = \{5\}$ و $B = \{3, 6\}$

و $C = \{2, 4, 6\}$ و $D = \{1, 3, 5\}$

• الحدث A حدث ابتدائي.

• $\bar{D} = C$ و $\bar{C} = D$

• $B \cap C = \{6\}$ إذن B و C منسجمين.

• $A \cap C = \emptyset$ إذن A و C غير منسجمين.

(3) الفضاءات الاحتمالية المنتهية

1. تمهيد : نشاط 1- : صندوق يحتوي على 3 كرات حمراء وكرتين خضراوتين وكرة بيضاء لا يمكن التمييز بينها باللمس.

نسحب كرتين بالتتابع وبدون إحلال من الصندوق.
نعتبر الأحداث التالية :

A « الحصول على كرتين لهما نفس اللون».

B « الحصول على كرتين لهما لون مختلف».

- أحسب $cardA$ و $cardB$.

- أكتب A و B بتفصيل.

- ما هو الحدث الذي هو أوفر حظا في أن يتحقق ؟ A أو B ؟

نشاط-2 : نعتبر التجربة العشوائية التالية (سحب كرة واحدة من الصندوق).

تذكير :

$$f = \frac{n}{N}$$

$$\frac{\text{التردد}}{\text{الاحصيص}} = \frac{\text{الاحصيص}}{\text{الاحصيص الإجمالي}}$$

تردد الكرات الحمراء هو $\frac{3}{6}$

نقول أن احتمال الحصول على كرة حمراء هو $\frac{3}{6}$.

$$\frac{\text{عدد إمكانيات الحصول على كرة حمراء}}{\text{عدد جميع الإمكانيات}} = \frac{3}{6} = \frac{1}{2}$$

تردد الكرات الخضراء هو $\frac{2}{6}$.

نقول أن احتمال الحصول على كرة خضراء هو $\frac{2}{6} = \frac{1}{3}$.

نعتبر الأحداث التالية :

R « الحصول على كرة حمراء».

V « الحصول على كرة خضراء».

$$\frac{\text{عدد إمكانيات الحصول على كرة حمراء}}{\text{عدد جميع الإمكانيات}} = \frac{3}{6}$$

احتمال الحدث R هو

$$\frac{\text{عدد إمكانيات الحصول على كرة حمراء}}{\text{عدد جميع الإمكانيات}} = \frac{2}{6}$$

احتمال الحدث V هو

2. احتمال على مجموعة

ملاحظة :

نلاحظ من خلال هذه الأمثلة أن احتمال حدث هو عدد نقيس به حظ حدث في أن يتحقق وهو عدد محصور بين 0 و 1.
حيث 0 هو احتمال الحدث المستحيل.
و 1 هو احتمال الحدث الأكيد.

نعتبر كون الإمكانيات Ω بحيث : $\Omega = \{e_1, e_2, \dots, e_n\}$

$\{e_i\}$ حدث ابتدائي لكل i من $\{1, 2, \dots, n\}$

إذا ربطنا كل عنصر e_i بعدد p_i بحيث : $0 \leq p_i \leq 1$ و $p_1 + p_2 + \dots + p_n = 1$

نقول أننا عرفنا احتمالا p على Ω .

ونقول احتمال الحدث الابتدائي $\{e_i\}$ هو p_i .

ونكتب $p(\{e_i\}) = p_i$

(Ω, p) يسمى فضاء احتماليا منتهيا.

تعريف :

ملاحظة : (1) كل احتمال p معرف على Ω هو تطبيق من $P(\Omega)$ نحو $[0,1]$.

(2) إذا كان $A = \{e_1, e_2, \dots, e_k\}$

فإن $P(A) = p(e_1) + p(e_2) + \dots + p(e_k)$

3. فرضية تساوي الاحتمالات

نفترض أن جميع الأحداث الابتدائية لها نفس الاحتمال.

أي $p_1 = p_2 = \dots = p_n$

ونعلم أن $p_1 + p_2 + \dots + p_n = 1$

إذن $\forall i \in \{1, 2, \dots, n\} \quad p_i = \frac{1}{n}$

ليكن A الحدث $A = \{e_1, e_2, \dots, e_k\}$

$$P(A) = p_1 + \dots + p_k = k \left(\frac{1}{n} \right) = \frac{k}{n}$$

وبما أن $card A = k$

و $card \Omega = n$

فإن $P(A) = \frac{k}{n} = \frac{card A}{card \Omega}$

خاصية :

إذا كانت جميع الأحداث الابتدائية لها نفس الاحتمال فإن احتمال الحدث A هو $P(A) = \frac{card A}{card \Omega}$

$$P(A) = \frac{\text{عدد إمكانيات تحقق } A}{\text{عدد جميع الإمكانيات}}$$

تطبيقات : أنظر التمارين.

الاحتمال الشرطي Probabilité conditionnelle

تمهيد :

نرمي نردين D_1 و D_2 وجوه كل واحد منهما مرقمة من 1 إلى 6

❖ نعتبر الحدث $A \ll \text{الحصول على مجموع أصغر من أو يساوي 5} \gg$

لدينا : $A = \{(i, j) / 1 \leq i \leq 6 \text{ و } 1 \leq j \leq 6 \text{ و } i + j \leq 5\}$

$$= \{(1,1), (1,2), (1,3), (1,4), (2,1), (2,2), (2,3), (3,1), (3,2), (4,1)\}$$

لدينا : $card A = 10$ و $card \Omega = 36$

$$P(A) = \frac{10}{36} = \frac{5}{18} \quad \text{إذن :}$$

❖ نفترض أن النرد D_2 عين رقم 5

في هذه الحالة الحدث A هو منعدم لأنه كيفما كان الرقم الذي عينه النرد D_1 فإن المجموع يكون أكبر قطعاً من 5

ليكن B الحدث $\ll \text{النرد } D_2 \text{ عين رقم 5} \gg$

نقول أن احتمال الحدث A علماً أن الحدث B قد تحقق هو منعدم . و نكتب : $P_B(A) = 0$ أو $P(A/B) = 0$

ملاحظة :

لدينا : $B = \{(1,5), (2,5), (3,5), (4,5), (5,5), (6,5)\}$

إذن : $A \cap B = \emptyset$

❖ ليكن C الحدث << النرد D₁ عين رقم 1 >>

$$C = \{(1,1), (1,2), (1,3), (1,4), (1,5), (1,6)\}$$

لكي يتحقق الحدث A علما أن C محقق يكفي أن يعين النرد D₂ رقم من الأرقام 1-2-3 و 4 .

$$P_A(C) = P(C/A) = \frac{4}{10} \quad \text{: ومنه :}$$

ملاحظة :

$$A \cap C = \{(1,1), (1,2), (1,3), (1,4)\}$$

لدينا

$$\text{card} A \cap C = 4$$

الدين

$$P_C(A) = \frac{4}{6} = \frac{\text{card} A \cap C}{\text{card} C} = \frac{P(A \cap C)}{P(C)}$$

ومنه

$$P(A \cap C) = P(C) \cdot P_C(A) \quad \text{: إذن :}$$

❖ نفترض أن الحدث A محقق يعني أن مجموع الرقمين المحصل عليهما هو أقل من أو يساوي 5 ما هو احتمال C ؟

$$P_A(C) = P(C/A) = \frac{4}{10} \quad \text{: إذن :}$$

$$P_A(C) = \frac{\text{card} A \cap C}{\text{card} A} = \frac{P(A \cap C)}{P(A)} \quad \text{ومنه}$$

تعريف :

ليكن A و B حدثين ضمن فضاء احتمالي منته حيث : $P(A) \neq 0$

$$P_A(B) = P(B/A) = \frac{P(A \cap B)}{P(A)} \quad \text{: احتمال الحدث B علما أن الحدث A محقق هو :}$$

استنتاج و خاصية " صيغة الاحتمالات المركبة "

إذا كان A و B حدثين احتمالا غير منعدمين فإن : $P(A \cap B) = P(A) \cdot P_A(B) = P(B) \cdot P_B(A)$

تطبيق 1 :

تحتوي شركة مغربية على 60% من الرجال 20% منهم أجانب و 40% من النساء 10% منهن أجنبيات .
نختار بطريقة عشوائية شخص من الشركة

1- ماهو احتمال الأحداث التالية :

$$A_1 \text{ << رجل أجنبي >> } A_2 \text{ << رجل مغربي >>}$$

$$A_3 \text{ << امرأة أجنبية >> } A_4 \text{ << امرأة أجنبية >>}$$

2- الشخص المختار رجل ما هو الاحتمال لكي يكون أجنبي

تطبيق 2 :

صندوق يحتوي على 3 كرات بيضاء و كرتين سوداويين

1- نسحب بالتتابع و بدون احلال كرتين من الصندوق .

ماهو احتمال الحدث A << الكرة الأولى بيضاء و الثانية سوداء >>

2- نسحب بالتتابع و بدون احلال ثلاث كرات من الصندوق.

ماهو احتمال الحدث B << لكرة الأولى بيضاء و الثانية سوداء و الثالثة بيضاء >>

الاحتمالات الكلية Les probabilités totales

تمهيد:

نعتبر صندوق يحتوي على كرة حمراء و كرة بيضاء و كرة خضراء .

نسحب كرتين من الصندوق بالتتابع و بدون احلال

$$\text{card} \Omega = A_3^2 = 6 \quad \text{لدينا :}$$

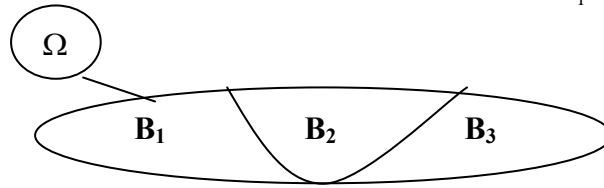
$$B_1 = \{(V, B)\} \quad \text{نعتبر الأحداث :}$$

$$B_2 = \{(B, R), (V, R)\}$$

$$B_3 = \{(R, B), (R, V), (B, V)\}$$

$$\text{لدينا : } B_2 \cap B_3 = \emptyset \text{ و } B_1 \cap B_3 = \emptyset \text{ و } B_1 \cap B_2 = \emptyset$$

$$\text{و } B_1 \cup B_2 \cup B_3 = \Omega$$



نقول أن الأحداث B و B و B تكون تجزينا لكون الإمكانات partition d' un ensemble

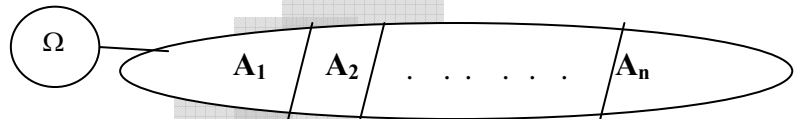
تعريف:

ليكن (Ω, p) فضاء احتماليا منتهيا

نقول أن الأحداث A_1 و A_2 و و A_n تكون تجزينا لكون الإمكانات Ω إذا وفقط إذا تحقق الشرطان التاليان:

$$\text{أ- لكل } i \text{ و } j \text{ من } \{1, 2, \dots, n\} \text{ حيث } i \neq j \text{ } A_i \cap A_j = \emptyset$$

$$\text{ب- } \Omega = A_1 \cup A_2 \cup \dots \cup A_n$$



ليكن B حدثا

$$\text{لدينا : } B = B \cap \Omega = \Omega \cap B$$

$$\text{إذن : } B = (A_1 \cup A_2 \cup \dots \cup A_n) \cap B$$

$$= (A_1 \cap B) \cup (A_2 \cap B) \cup \dots \cup (A_n \cap B)$$

$$\text{إذن : } p(B) = P(A_1 \cap B) + P(A_2 \cap B) + \dots + P(A_n \cap B)$$

$$= p(A_1) \cdot p_{A_1}(B) + \dots + p(A_n) \cdot p_{A_n}(B)$$

خاصية :

لتكن A_1 و A_2 و و A_n تجزينا ل Ω

نعتبر الحدث B

$$p(B) = p(A_1) \cdot p_{A_1}(B) + \dots + p(A_n) \cdot p_{A_n}(B)$$

تطبيق :

لدينا ثلاث صناديق C_1 و C_2 و C_3

C_1 يحتوي على كرة بيضاء و ثلاث كرات سوداء

C_2 يحتوي على كرتين لونهما أبيض و كرتين لونهما أسود

C_3 يحتوي على ثلاث كرات بيضاء و كرة سوداء

نختار بطريقة عشوائية صندوقا ثم نسحب منه كرة واحدة

أحسب الاحتمال الحصول على كرة بيضاء

ليكن B الحدث $\langle\langle$ الحصول على كرة بيضاء $\rangle\rangle$

لدينا الحدث $C_1 \langle\langle$ اختيار الصندوق $C_1 \rangle\rangle$

$C_2 \langle\langle$ اختيار الصندوق $C_2 \rangle\rangle$

$C_3 << \text{اختيار الصندوق} >> C_3$

لدينا :

$$p(C_1) = p(C_2) = p(C_3) = \frac{1}{3}$$

$$\Omega = C_1 \cup C_2 \cup C_3 \quad \text{و}$$

اذن :

$$\begin{aligned} p(B) &= p(\Omega \cap B) \\ &= p((C_1 \cup C_2 \cup C_3) \cap B) \\ &= p(C_1 \cap B) + p(C_2 \cap B) + p(C_3 \cap B) \\ &= p(C_1) \cdot p_{C_1}(B) + p(C_2) \cdot p_{C_2}(B) + p(C_3) \cdot p_{C_3}(B) \\ &= \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{4} + \frac{1}{3} \cdot \frac{2}{4} + \frac{1}{3} \cdot \frac{3}{4} = \frac{1}{2} \end{aligned}$$

يمكن استعمال الشجرة

الاختيارات المتكررة

تمهيد:

1- عندما نقوم بتجربة عشوائية مكونة من إعادة نفس الاختبار n مرة . نقول إننا قمنا باختبارات متكررة .
les épreuves repetées

مثال : (1) رمي نرد ثلاث مرات
(2) رمي قطعة نقدية n مرة

2- ليكن D نردا وجوه الستة مرقمة من 1 إلى 6
نرمي النرد D ؛ 5 مرات بالتتابع و نسجل الرقم المحصل عليه في كل رمية
ليكن C_k الحدث $<< \text{الحصول } k \text{ مرة على الرقم } 2 >>$
أحسب احتمال الحدث C_k حسب قيم k

خلاصة و خاصية :

ليكن A حدثا احتماله p في اختبار عشوائي

إذا أعيد هذا الاختبار n مرة فإن احتمال وقوع الحدث A k مرة بالضبط هو : $C_n^k (p)^k (1-p)^{n-k}$, $(k \leq n)$

تطبيق :

صندوق يحتوي على 3 كرات بيضاء و كرتين سوداويين . نسحب 10 كرات بالتتابع و بإحلال

1- أحسب احتمال الحصول على 4 مرات بالضبط على كرة سوداء .

2- أحسب احتمال الحصول على 3 مرات بالضبط على كرة بيضاء .

المتغيرات العشوائية Les variables aléatoires

(1) تمهيد:

1 - يحتوي صندوق على 8 كرات مرقمة من 1 إلى 8 . نسحب بالتتابع و بإحلال 4 كرات .

ليكن X هو عدد الكرات التي تحمل رقما فرديا من بين الكرات الأربعة المسحوبة .

(a) ماذا تعني الأحداث $(X=0)$ $(X=4)$

(b) أحسب احتمال كل من هذه الأحداث

2- صندوق يحتوي على كرتان لونهما أبيض و ثلاث كرات سوداء و كرة حمراء . نسحب تائيا ثلاث كرات .
و ليكن X هو عدد الألوان المحصل عليها .

(a) حدد قيم X

(b) ما هي الأحداث : $(X=1)$, $(X=2)$, $(X=3)$, $(X=4)$.

(c) أحسب : $P(X=1)$, $P(X=2)$, $P(X=3)$.

(2) تعريف:

ليكن (Ω, P) فضاء احتماليا منتهيا . كال تطبيق من Ω نحو \mathbb{R} يسمى متغيرا عشوانيا .

كتابة و ترميز :

- $X(\Omega)$ هي مجموعة الصور بالتطبيق X
- عادة نكتب $X(\Omega) = \{x_1, x_2, \dots, x_k\}$ بحيث $x_1 < x_2 < \dots < x_k$
- $(X = x_k)$ هو الحدث $X >>$ تأخذ القيمة x_k
- $(X \leq x_k)$ هو الحدث $X >>$ تأخذ قيمة أقل من أو تساوي x_k

(3) قانون احتمال متغير عشوائي:**تمهيد :**

استغلال التطبيق السابق .

x_i	1	2	3	4
$P(X = x_i)$	$P(X=1)$	$P(X=2)$	$P(X=3)$	$P(X=4)$

تعريف :قانون احتمال (أو توزيع) المتغير العشوائي X هو التطبيق f الذي يربط كل عنصر x_i من $X(\Omega)$ باحتمال الحدث

$$f(x_i) = P(X = x_i) \text{ أي } (X = x_i)$$

ملاحظة :يتم تحديد قانون احتمال متغير عشوائي X بتحديد مجموعة قيم Ω $X(\Omega)$

$$X(\Omega) = \{x_1, x_2, \dots, x_k\}$$

ثم حساب $P(X = x_i) = p_i$ ثم كتابة النتائج في جدول : يسمى جدول قانون احتمال المتغير العشوائي X **تطبيق : يونيو 1999 مراكش**

تتكون فرقة مسرحية من 3 رجال و 3 نساء .

بعد انتهاء عرض المسرحي، يخرج جميع أعضاء الفرقة واحد تلو الآخر من وراء الستار و يبقون لتحية الجمهور .

ليكن X المتغير العشوائي الذي يساوي عدد الرجال الذين ظهروا للجمهور قبل ظهور أول امرأة .1- حدد قيم X .2- بين أن : $P(X=1) = 3/10$ و $P(X=2) = 3/20$ 3- أعط قانون احتمال X .**(4) الأمل الرياضي:****تعريف :**ليكن X متغيرا عشوائيا معرفا على فضاء احتمالي منته (Ω, P) العدد الحقيقي $E(X) = \sum_{i=1}^n p_i x_i$ يسمى الأمل الرياضي للمتغير X .حيث : $X(\Omega) = \{x_1, x_2, \dots, x_n\}$ و $p_i = P(X = x_i)$ **ملاحظة:**

$$E(X) = \bar{X}$$

ليكن X متغيرا عشوائيا بحيث : $X(\Omega) = \{x_1, x_2, \dots, x_n\}$
 و $E(X)$ هو الأمل الرياضي للمتغير X .

يسمى مغايرة X

$$V(X) = \sum_{i=1}^n p(x - E(X))^2 \quad \text{العدد:}$$

و العدد: $\sigma(X) = \sqrt{V(X)}$ يسمى الانحراف الطرازي ل X حيث $p_i = P(X = x_i)$ لكل $1 \leq i \leq n$

ملاحظة 1 :

$$\begin{aligned} V(X) &= \sum_{i=1}^n p(x - E(X))^2 \\ &= \sum_{i=1}^n p_i (x_i^2 - 2x_i E(X) + E(X)^2) \\ &= \sum_{i=1}^n p_i x_i^2 - 2E(X) \sum_{i=1}^n p_i x_i + E(X)^2 \sum_{i=1}^n p_i \\ &= E(X^2) - 2(E(X))^2 + (E(X))^2 \\ &= E(X) - (E(X))^2 \end{aligned}$$

$$V(X) = E(X) - (E(X))^2$$

اذن :

ملاحظة 2 : $V(X) \geq 0$ La fonction de répartition دالة التجزيي (6)

تمهيد :

ليكن (Ω, P) فضاءا احتماليا منتهيا. و X متغير عشوائيا بحيث : $X(\Omega) = \{x_1, x_2, \dots, x_n\}$

بحيث : $x_1 < x_2 < \dots < x_n$ لدينا : $\mathbb{R} =]-\infty, x_1] \cup]x_1, x_2] \cup]x_2, x_3] \cup \dots \cup]x_n, +\infty[$ ليكن x عددا حقيقيا :

الحالة 1:

إذا كانت : $x = x_i$ و $i \in \{1, 2, \dots, n\}$

$$(X < x_i) = (X = x_1) \cup (X = x_2) \cup \dots \cup (X = x_{i-1})$$

الحالة 2:

إذا كانت : $x_i < x < x_{i+1}$

$$(X < x_i) = (X = x_1) \cup (X = x_2) \cup \dots \cup (X = x_i)$$

$$(X < x) = \emptyset \quad x \leq x_i \quad \text{الحالة 3 :}$$

الحالة 4 :

$$(X < x) = \Omega \quad x_n < x$$

إذا ربطنا كل عدد x باحتمال الحدث $(X < x)$

$$F : \mathbb{R} \rightarrow [0,1]$$

$$x \mapsto P(X < x)$$

فإننا عرفنا دالة تسمى دالة التجزئ للمتغير X

تعريف :

ليكن X متغيرا عشوائيا معرفا على فضاء احتمالي منته (Ω, P)

الدالة F المعرفة على \mathbb{R} ب : $F(X) = P(X < x)$

تسمى دالة التجزئ للمتغير العشوائي X

مثال : يكون المطلوب فيه هو تحديد دالة التجزئ و تمثيلها مبيانيا .

(7) التوزيع الحداني :

تذكير :

إذا كانت تجربة عشوائية تتكون من إعادة نفس الاختبار n مرة و A حدثا من هذا الاختيار حيث : $P(A) = p$

فان احتمال أن يتحقق الحدث A k مرة بالضبط $(k \leq n)$

$$\text{هو : } C_n^k p^k (1-p)^{n-k}$$

إذا اعتبرنا المتغير العشوائي المرتبط بعدد المرات التي يتحقق فيها الحدث A

$$\text{فإن : } P(X = k) = C_n^k p^k (1-p)^{n-k}$$

هذا المتغير العشوائي يسمى متغيرا عشوائيا حدانيا

و العدان n و p يسميان وسيطا المتغير الحداني X

خاصية:

ليكن X متغيرا عشوائيا حدانيا وسيطاه n و p :

$$P(X = k) = C_n^k p^k (1-p)^{n-k}$$

ملاحظة :

المتغير العشوائي الحداني يسمى أيضا قانون حداني أو توزيع حداني

مبرهنة :

ليكن X متغيرا عشوائيا حدانيا وسيطاه n و p .

$$\text{لدينا : } V(X) = np(1-p) \quad \text{و} \quad E(X) = np$$

تطبيقات:

أنظر السلسلة.

صندوق يحتوي على ثلاث كرات بيضاء و كرتين لونهما أسود .

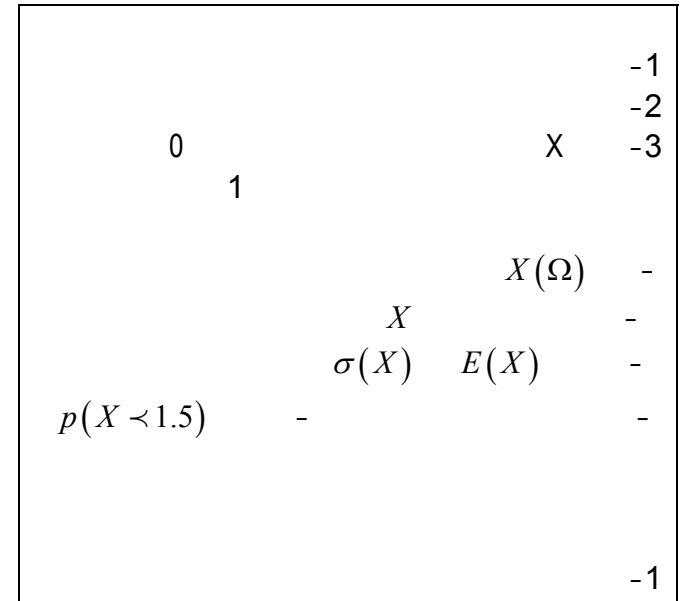
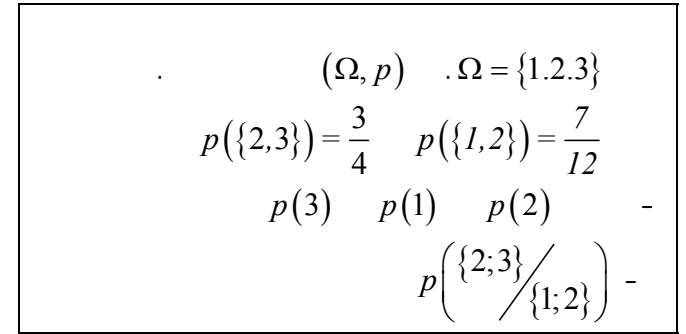
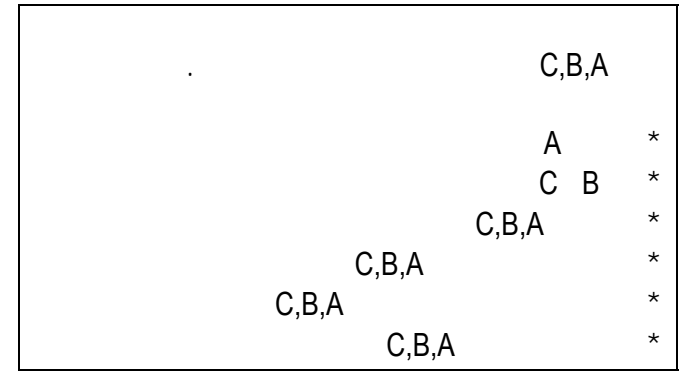
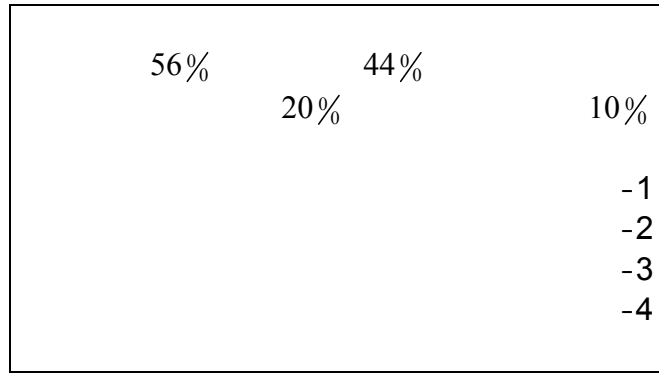
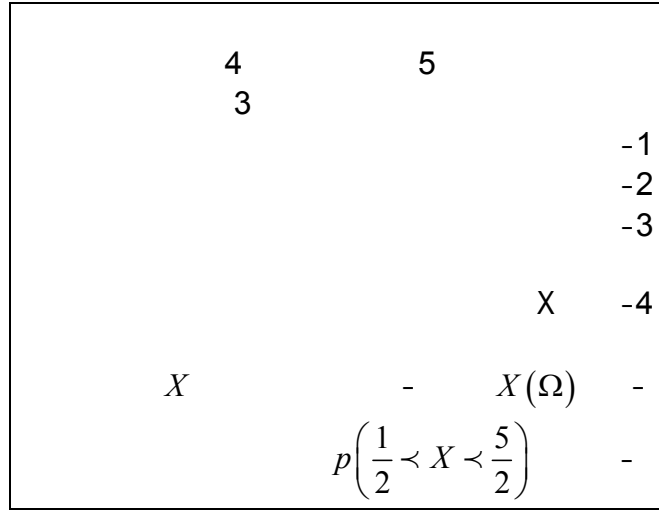
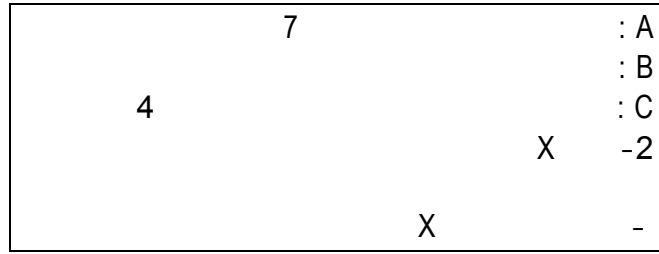
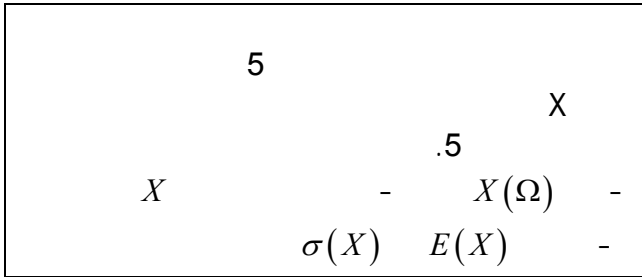
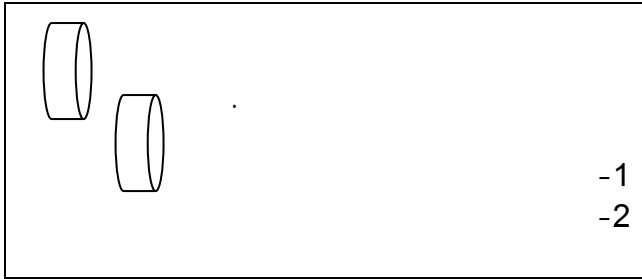
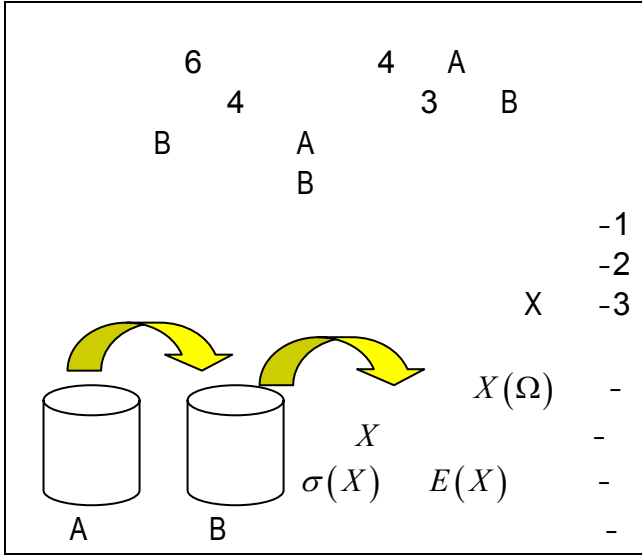
نسحب تانيا ثلاث كرات من الصندوق .

ليكن X المتغير العشوائي المرتبط بعدد الكرات السوداء المسحوبة

1- حدد قيم X . أعط قانون احتمال X .

2- أحسب : $E(X)$ و $V(X)$ و $\sigma(X)$

تعاريف ماب الاحتمالات



تم نشر هذا الملف بواسطة قرص **تجربتي** مع الباكالوريا

tajribatybac@gmail.com

facebook.com/tajribaty

jjel.tk/bac