

### الدوال الأصلية

1- تعريف: إذا كانت الدالة  $f$  معرفة على المجال  $I$  من  $\mathbb{R}$ .

نقول أن  $F$  دالة أصلية للدالة  $f$  إذا حققت  $F' = f$  في المجال  $I$ .

مثال:

$f$  و  $F$  دالتين عدديتين حيث:  $f(x) = 3x^2 - 2x + \cos x$  و  $F(x) = x^3 - x^2 + \sin x$ . تحقق أن الدالة  $F$  هي دالة أصلية للدالة  $f$  في  $\mathbb{R}$ .  
ثم عين دالة أخرى أصلية للدالة  $f$ .

مبرهنة 01: كل دالة مستمرة على مجال هي تقبل دوال أصلية على هذا المجال.

مبرهنة 02: لتكن  $F$  و  $G$  دالتين أصليتين للدالة  $f$  على المجال  $I$ .

فإن الفرق بينهما ثابت حقيقي أي: من أجل كل عدد  $x$  من المجال  $I$   
 $F(x) = G(x) + c$  .... (  $c \in \mathbb{R}$  ).

البرهان: 2....

2- الدالة الأصلية لدالة تأخذ قيمة معينة من أدل قيمة للمتغير  $x$ :

مبرهنة: لتكن  $f$  دالة مستمرة على المجال  $I$ . وليكن  $x_0$  من  $I$  و  $y_0$  من  $\mathbb{R}$ .

توجد دالة وحيدة  $F$  دالة أصلية للدالة  $f$  تحقق الشرط:  $F(x_0) = y_0$ .

مثال:

1-  $f(x) = \sin x$  عين الدالة الأصلية لها في  $\mathbb{R}$  التي تحقق  $F(\pi) = 0$ .

2-  $f(x) = \frac{x}{\sqrt{x^2 + 1}}$  عين الدالة الأصلية لها في  $\mathbb{R}$  التي تحقق  $F(0) = 2$ .

### 3- الدوال الأصلية لدوال مألوفة

المجال $I$	الدالة الأصلية $F$ و $c$ ثابت	الدالة $f$
$\mathbb{R}$	$F(x) = Kx + c$	$f(x) = K$ ( $K$ ثابت )
$\mathbb{R}$	$F(x) = \frac{1}{2}x^2 + c$	$f(x) = x$
$\mathbb{R}$	$F(x) = \frac{1}{2}ax^2 + bx + c$	$f(x) = ax + b$
$\mathbb{R}^+$ و $\mathbb{R}^-$ أو $\mathbb{R}^*$ $n \geq -2$	$F(x) = \frac{x^{n+1}}{n+1} + c$	$f(x) = x^n$ .. ( $n \in \mathbb{Z}^*, n \neq -1$ )
$]0; +\infty[$	$F(x) = 2\sqrt{x} + c$	$f(x) = \frac{1}{\sqrt{x}}$
$]0; +\infty[$	$F(x) = -\frac{1}{x} + c$	$f(x) = \frac{1}{x^2}$
$\mathbb{R}$	$F(x) = \sin x + c$	$f(x) = \cos x$
$\mathbb{R}$	$F(x) = -\cos x + c$	$f(x) = \sin x$
$]-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}[$	$F(x) = -\tan x + c$	$f(x) = 1 + \tan^2 x = \frac{1}{\cos^2 x}$
$\mathbb{R}$	$F(x) = \frac{1}{a} \sin(ax + b) + c$	$f(x) = \cos(ax + b)$
$\mathbb{R}$	$F(x) = -\frac{1}{a} \cos(ax + b) + c$	$f(x) = \sin(ax + b)$
$]0; +\infty[$	$F(x) = \ln x + c$	$f(x) = \frac{1}{x}$

أمثلة: عين الدالة الأصلية للدالة  $f$  حسب كل حالة:

$$(1) f(x) = x^5 \quad (2) f(x) = \frac{2}{x^3} \quad (3) f(x) = \frac{5}{\sqrt{x}} \quad (4) f(x) = \tan^2 x$$

$$(5) f(x) = 2\sin(2x) + 3\cos(2x) + 4$$

#### 4- عمليات على الدوال الأصلية:

$u$  و  $v$  دالتين مستمرتين في المجال  $I$ .

الشروط	الأصلية	الدالة
	$u + v$	$u' + v'$
	$Ku$	$Ku'$ و $K$ ثابت
$u \neq 0$ في $I$ عند: $n \leq 0$	$\frac{u^{n+1}}{n+1}$	$u'u^n$ ( $n \in \mathbb{Z}, n \neq -1$ )
$u > 0$ في $I$	$2\sqrt{u}$	$\frac{u'}{\sqrt{u}}$
$v \neq 0$ في $I$	$-\frac{1}{v}$	$\frac{v'}{v^2}$
	$v \circ u$	$u' \times (v' \circ u)$
$u(x) \neq 0$	$\ln u  + c$	$\frac{v'}{v}$
	$e^u + c$	$u'e^u$
	$\sin u + c$	$u' \cos u$
	$-\cos u + c$	$u' \sin u$

أمثلة:

عين الدالة الأصلية للدالة  $f$  حسب كل حالة:

$$(1) \quad f(x) = \frac{x^3 + 3x + 1}{3} \quad \square \text{ في}$$

$$(2) \quad f(x) = 1 - \frac{2}{x^3} + \frac{2}{\sqrt{x}} \quad \square \text{ في}$$

$$(3) \quad f(x) = \frac{x+1}{(x^2 + 2x + 7)^3} \quad \square \text{ في}$$

$$(4) \quad f(x) = \frac{\cos x}{\sqrt{2 \sin x + 1}} \quad \square \text{ في}$$

$$(5) \quad f(x) = \sin^2 x \quad \square \text{ في}$$

$$(6) \quad f(x) = \frac{\ln x}{x} \quad \square \text{ في}$$

5- تمارين

التمرين 01:  $F$  دالة معرفة على  $]0; +\infty[$  بالعلاقة:  $F(x) = \frac{2}{3}x\sqrt{x}$  ثم ماذا تستنتج؟

التمرين 02:

1- عين الدالة الأصلية لكل دالة مما يلي:  $f(x) = x^4 - 3x^2 + 3x - 1$  و

$g(x) = x(x^2 + 1)^2$  و  $h(x) = \frac{\sin x}{\cos^2 x}$  و  $k(x) = \sin^4 x \times \cos^3 x$ .

2- لتكن الدالة العددية  $F$  المعرفة في  $]0; +\infty[$ :  $F(x) = x \ln x - x$ . برهن أن

الدالة  $F$  هي دالة أصلية للدالة  $(\ln)$ . ثم استنتج دالة أصلية للدالة  $L$  في

$]0; +\infty[$  حيث:  $L(x) = 8 \ln x - 4x + 4$ .

التمرين 03: لدينا الدالة  $f$  المعرفة في  $]0; 1[$  بالعلاقة:  $f(x) = \frac{2x-1}{x^2(x-1)^2}$

1- عين العددين الحقيقيين  $a$  و  $b$  علما أن:  $f(x) = \frac{a}{x^2} + \frac{b}{(x-1)^2}$ .

2- استنتج الدالة الأصلية  $F$  للدالة  $f$  على المجال  $]0; 1[$  و تحقق:  $F(\frac{1}{2}) = 6$ .

التمرين 04: لدينا الدالة  $f$  المعرفة في  $\square$  بالعلاقة:  $f(x) = \frac{1}{1+e^x}$

$g$  دالة المعرفة في  $\square$  بالعلاقة:  $g(x) = 1 - f(x)$ .

1- احسب دالة أصلية للدالة  $g$  في  $\square$ .

2- استنتج دالة أصلية للدالة  $f$  في  $\square$ .

التمرين 05: لدينا الدالة  $f$  المعرفة في  $]-\infty; \frac{3}{2}[$  بالعلاقة:  $f(x) = \frac{2x^2 - x - 1}{4x - 6}$

1- عين الأعداد الحقيقية  $a$  و  $b$  و  $c$  علما أن:  $f(x) = ax + b + \frac{c}{4x - 6}$ .

2- استنتج الدالة الأصلية  $F$  للدالة  $f$  على المجال  $]-\infty; \frac{3}{2}[$ .