الجمهورية الجزائرية الديمقراطية الشعبية

اختبارالثلاثي الثاني في مادة: الرياضيات — **المستوى : 3 ثانوي (الشعب العلمية)**

التمرين الأول :

1) أ- أكتب على الشكل الأسّي العدد المركب a حيث : $a=-2+2\sqrt{3}i$.

ب- حل في مجموعة الأعداد المركبة $\mathbb{C}$ المعادلة ذات المجهول z حيث : $z^2=-2+2\sqrt{3}i$.

2) في المستوي المركب , نعتبر النقط A , B , C ذات اللاحقات -2 , $-1-\sqrt{3}i$, $1+\sqrt{3}i$ على الترتيب .

أ- أكتب على الشكل الجبري ثمّ المثلثي و الأسّي العدد المركب : $\dfrac{z_C-z_A}{z_B-z_A}$, فسّر النتائج هندسيا .

ب- حدّد طبيعة المثلث ABC . ثم عيّن لاحقة مركزه G .

ج- عين لا حقة مركز الدائرة المحيطة بالمثلث ABC ثمّ أحسب نصف قطرها .

د- عين لا حقة النقطة D بحيث يكون الرباعي $ABDC$ مستطيلا .

3) لتكن (E) مجموعة النقط M ذات اللّاحقة z حيث : $Arg\left(\bar{z}+2\right)=\dfrac{\pi}{3}$

- تحقّق أنّ B تنتمي إلى المجموعة (E)
- عيّن ثمّ أنشئ المجموعة (E) .

4) عين ثمّ أنشئ مجموعة النقط في كل حالة

1〉 $\left\|\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MB}+\overrightarrow{MC}\right\|=9$ 2〉 $\left|z-z_A\right|=\left|z-z_B\right|$

3〉 $Arg\left(\overline{iz}-iz_B-z_A\right)=\dfrac{\pi}{3}$ 4〉 $Arg\left(iz+\sqrt{3}-i\right)=-\dfrac{\pi}{4}$

التمرين الثاني :

1) حل في مجموعة الأعداد المركبة $\mathbb{C}$ المعادلة $(z-3+2i)(z^2+6z+10)=0$.

2) علّم في المستوي المنسوب إلى المعلم المتعامد و المتجانس $(O,\vec{u},\vec{v})$ النقط A , C , D و H ذات اللاحقات $z_A=3-2i$, $z_C=-3+i$, $z_D=-3-i$, $z_H=1$ على الترتيب .

3) z عدد مركب يحقق الجملة : $\begin{cases}\arg(z-3+2i)=\arg(z-1)+\dfrac{\pi}{2}\\ |z-3+2i|=|z-1|\end{cases}$

أ- بيّن أنّ الجملة تكافئ : $\dfrac{z-3+2i}{z-1}=i$, ثمّ عيّن قيمة z .

ب- B النقطة التي لاحقتها $z_B=3$, تحقق أنّ $\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{DC}$. ما هي طبيعة الرباعي $ABCD$ ؟

ج- لتكن K النقطة التي لاحقتها z_K حيث : $z_K=1-2i$

- أكتب على الشكل الأسّي العدد المركب L حيث : $L=\dfrac{z_A-z_H}{z_B-z_K}$.
- تحقّق أنّ : $\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{KH}$. ما هي طبيعة الرباعي $ABHK$.

التمرين الثالث :

I. f دالّة معرفة على المجال $]0;+\infty[$ بـ : $f(x)=x(lnx)^2$.
(C_f) منحناها البياني في معلم متعامد و متجانس $(O,\vec{i},\vec{j})$ حيث : $\|\vec{i}\|=10cm$, $\|\vec{j}\|=1cm$

(1) أحسب نهاية الدّالة f عند $+\infty$.

(2) أ- بيّن أنّه من أجل كل x من $]0;+\infty[$ فإنّ : $f(x)=4\left(\sqrt{x}ln\sqrt{x}\right)^2$.

ب- أحسب $\lim\limits_{x \xrightarrow{>} 0} f(x)$.

(3) أحسب $f'(x)$ و أدرس إشارتها ثمّ شكل جدول التغيرات للدّالة f .

(4) أرسم (C_f) في المجال $]0\ ;\ 1]$.

II. g دالّة معرفة على المجال $]0;+\infty[$ بـ : $g(x)=-2xlnx$.
(C_g) منحناها البياني في معلم متعامد و متجانس $(O,\vec{i},\vec{j})$ حيث : $\|\vec{i}\|=10cm$, $\|\vec{j}\|=1cm$

(1) أحسب نهايتي الدّالة g .

(2) أدرس إتجاه تغيّر الدّالة g , ثمّ شكل جدول تغيراتها .

(3) بيّن أنّه من أجل كل x من $]0;+\infty[$ فإنّ : $f(x)-g(x)=x\,f'(x)$.

▪ استنتج الوضعية النسبية للمنحنيين (C_f) و (C_g) .

(4) أرسم (C_g) في المجال $]0\ ;\ 1]$.

III. ليكن $x_0\in]0;+\infty[$.

(1) بيّن أنّ معادلة المماس (T) لـ : (C_f) عند النقطة ذات الفاصلة x_0 هي : $y=x\,f'(x_0)+g(x_0)$

(2) عيّن إحداثيي A نقطة تقاطع (T) مع محور التراتيب .

التمرين الرابع :

في الفضاء المنسوب الى معلم متعامد ومتجانس $(O,\vec{i},\vec{j},\vec{k})$ نعتبر النقط : $A(1\ ;1\ ;0)$, $B(-1\ ;0\ ;2)$, $C(-1\ ;0\ ;1)$.

و المستوي (P) الذي تمثيله الوسيط : $(P):\begin{cases}x=t+1\\y=t+\alpha-2\\z=3t+\alpha+3\end{cases}$ حيث α, t عددان حقيقيان .

(1) تحقق أن النقط A , B و C ليست في إستقامية . ثمّ بيّن أنّ $x-2y+1=0$ هي معادلة ديكارتية للمستوى (ABC) .

(2) أكتب معادلة ديكارتية للمستوي (P) , ثمّ تحقّق أنّ C نقطة منه .

(3) أ- تحقق أنّ المستويين (P) و (ABC) متعامدان , ثمّ عيّن تمثيلا وسيطيا للمستقيم (Δ) مستقيم تقاطعهما .

ب- أحسب المسافة بين النقطة A و المستقيم (Δ) .

(4) عيّن مجموعة النقط M من الفضاء المتساوية البعد عن كل من (P) و (ABC) .

(5) لتكن G مرجح الجملة $\{(A\ ;3),(B\ ;\lambda),(C\ ;\lambda^2)\}$ حيث $\lambda\in\mathbb{R}$.

أ- بين أنه من أجل كل عدد حقيقي λ فإن G موجودة .

ب- عيّن قيمة λ حتى تنتمي G إلى المستقيم (Δ) .

تصحيح اختبار الثلاثي الثاني في مادة: الرياضيات

التمرين الأول : 06 نقاط

1) أ- أكتب على الشكل الأسي العدد المركب a حيث : $a=-2+2\sqrt{3}i$. **0.25**

$$a=-2+2\sqrt{3}i=4\left(-\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}i\right)=\left[4;\frac{2\pi}{3}\right]=4e^{i\frac{2\pi}{3}}$$

ب- حل في مجموعة الأعداد المركبة $\mathbb{C}$ المعادلة ذات المجهول z حيث : $z^2=-2+2\sqrt{3}i$. **0.5**

$$z^2=-2+2\sqrt{3}i\Leftrightarrow r^2e^{i2\theta}=4e^{i2\frac{\pi}{3}}\Leftrightarrow r^2=4\wedge\theta=\frac{\pi}{3}\Leftrightarrow\begin{cases}r=-2\wedge\theta=\frac{\pi}{3}\\ r=2\wedge\theta=\frac{\pi}{3}\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}z_1=-1-\sqrt{3}i\\ z_2=1+\sqrt{3}i\end{cases}$$

2) في المستوي المركب , نعتبر النقط A , B , C ذات اللاحقات -2 , $-1-\sqrt{3}i$, $1+\sqrt{3}i$ على الترتيب .

أ- أكتب على الشكل الجبري ثمّ المثلثي و الأسي العدد المركب : $\frac{z_C-z_A}{z_B-z_A}$, فسّر النتائج هندسيا . **1**

$$\frac{z_C-z_A}{z_B-z_A}=\frac{1+\sqrt{3}i+2}{-1-\sqrt{3}i+2}=\frac{3+\sqrt{3}i}{1-\sqrt{3}i}\bullet\frac{1+\sqrt{3}i}{1+\sqrt{3}i}=\frac{3+3\sqrt{3}i+\sqrt{3}i-3}{4}=\frac{4\sqrt{3}i}{4}=\sqrt{3}i=\left[\sqrt{3};\frac{\pi}{2}\right]$$

$$\frac{z_C-z_A}{z_B-z_A}=\sqrt{3}\left(\cos\left(\frac{\pi}{2}\right)+i\sin\left(\frac{\pi}{2}\right)\right)=\sqrt{3}e^{i\frac{\pi}{2}}$$

تفسير النتائج هندسيا :

$$\left|\frac{z_C-z_A}{z_B-z_A}\right|=\frac{AC}{AB}=\sqrt{3}\quad,\quad\arg\left(\frac{z_C-z_A}{z_B-z_A}\right)=\left(\overrightarrow{AB};\overrightarrow{AC}\right)=\frac{\pi}{2}$$

ب- حدّد طبيعة المثلث ABC . ثم عيّن لاحقة مركزه G . **0.25**

حسب النتائج السابقة : المثلث ABC قائم في A .

$$z_G=\frac{z_A+z_B+z_C}{3}=\frac{-2-1-\sqrt{3}i+1+\sqrt{3}i}{3}=-\frac{2}{3}$$

ج- عين لا حقة مركز الدائرة المحيطة بالمثلث ABC ثمّ أحسب نصف قطرها . **0.5**

لتكن z_O لاحقة النقطة O مركز الدائرة المحيطة بالمثلث القائم ABC .

مركز الدائرة المحيطة بالمثلث القائم ABC هو منتصف وترها إذن : $z_O=\frac{z_B+z_C}{2}=\frac{-1-\sqrt{3}i+1+\sqrt{3}i}{2}=0$

و نصف قطرها R هو نصف طول الوتر أي :

$$R=\frac{BC}{2}=\frac{|z_C-z_B|}{2}=\frac{|1+\sqrt{3}i+1+\sqrt{3}i|}{2}=\frac{|2+2\sqrt{3}i|}{2}=\frac{4}{2}=2$$

د- عين لاحقة النقطة D بحيث يكون الرباعي $ABDC$ مستطيلا . **0.25**

$ABDC$ مستطيل معناه : $\left(\overrightarrow{AB};\overrightarrow{AC}\right)=\dfrac{\pi}{2}$ (1 (محقق) و $\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{CD}$ (2

$$\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{CD}\Leftrightarrow z_B-z_A=z_D-z_C\Leftrightarrow z_D=z_C+z_B-z_A=-z_A=2$$

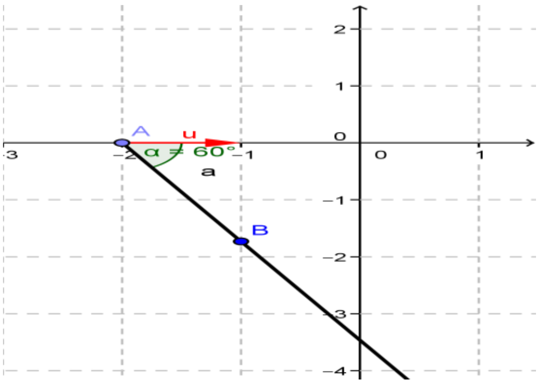
3) لتكن (E) مجموعة النقط M ذات اللاحقة z حيث : $Arg\left(\overline{z}+2\right)=\dfrac{\pi}{3}$

- تحقق أنّ B تنتمي إلى المجموعة (E) . **0.25**

$\overline{z_B}+2=-1+\sqrt{3}i+2=1+\sqrt{3}i=z_C=\left[2;\dfrac{\pi}{3}\right]$ إذن : $Arg\left(\overline{z_B}+2\right)=\dfrac{\pi}{3}$ و منه : $B\in(E)$

- عيّن ثمّ أنشئ المجموعة (E) . **0.5**

$$Arg\left(\overline{z}+2\right)=\frac{\pi}{3}\Leftrightarrow Arg\left(\overline{\overline{z}+2}\right)=-\frac{\pi}{3}\Leftrightarrow Arg\left(z+2\right)=-\frac{\pi}{3}\Leftrightarrow Arg\left(z-z_A\right)=-\frac{\pi}{3}\Leftrightarrow\left(\vec{u},\overrightarrow{AM}\right)=-\frac{\pi}{3}$$



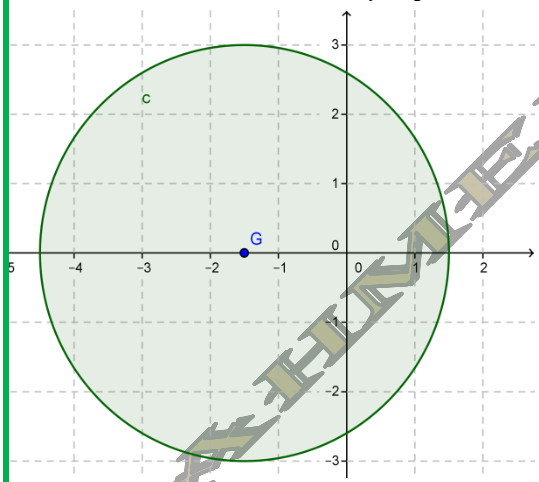
مجموعة النقط هي نصف المستقيم المفتوح الذي مبدؤه A

ويشمل النقطة B و ميله $\tan g\left(-\dfrac{\pi}{3}\right)$ و نكتب : $(E)=[AB)-\{A\}$

4) عين ثمّ أنشئ مجموعة النقط في كل حالة :

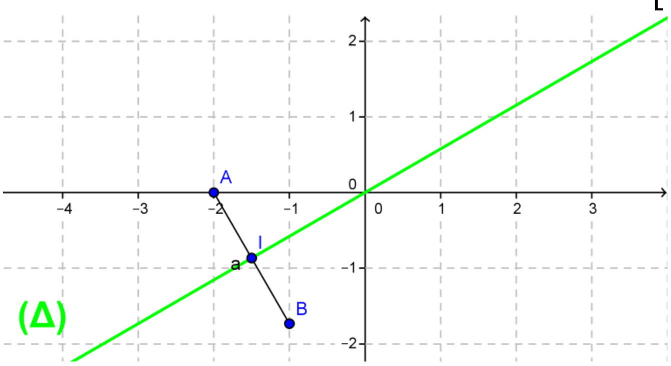
$$1)\left\|\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MB}+\overrightarrow{MC}\right\|=9\quad\Leftrightarrow\quad\left\|3\overrightarrow{MG}\right\|=9\Leftrightarrow MG=3$$

مجموعة النقط هي الدائرة ذات المركز G و نصف القطر 3 . **0.5**



$$2)\left|z-z_A\right|=\left|z-z_B\right|\quad\Leftrightarrow\quad AM=BM$$

مجموعة النقط هي المستقيم (Δ) محور القطعة المستقيمة $[AB]$. **0.5**



$$3\rangle\ Arg\left(\overline{iz}-iz_B-z_A\right)=\frac{\pi}{3}\Leftrightarrow Arg\left(\overline{\overline{iz}-iz_B-z_A}\right)=-\frac{\pi}{3}\Leftrightarrow Arg\left(iz+i\overline{z_B}-\overline{z_A}\right)=-\frac{\pi}{3}$$

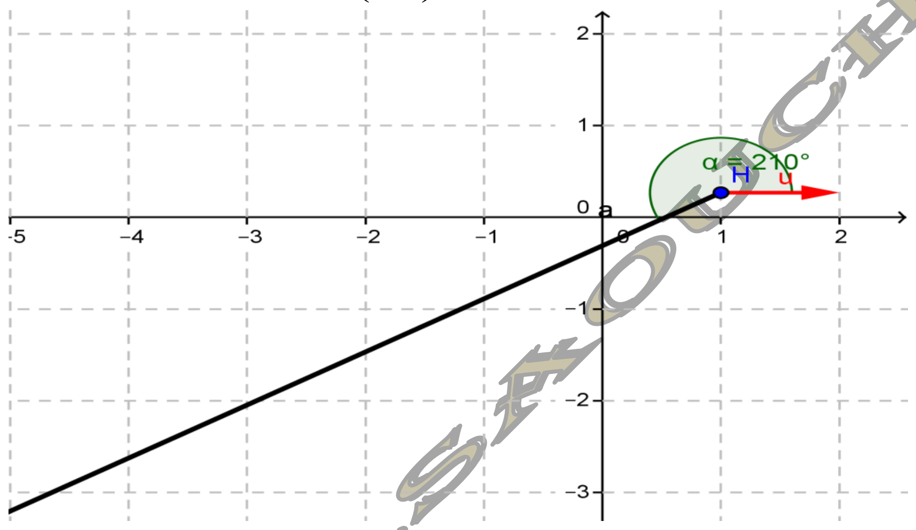
$$\Leftrightarrow Arg\left(iz+i\left(-1+\sqrt{3}i\right)+2\right)=-\frac{\pi}{3}\Leftrightarrow Arg\left(i\bullet\left(z-1+\sqrt{3}i-2i\right)\right)=-\frac{\pi}{3}$$

$$\Leftrightarrow Arg\left(i\right)+Arg\left(z-\left(1+\left(2-\sqrt{3}\right)i\right)\right)=-\frac{\pi}{3}\Leftrightarrow\frac{\pi}{2}+Arg\left(z-z_H\right)=-\frac{\pi}{3}$$

$$z_H=1+\left(2-\sqrt{3}\right)i$$

$$\Leftrightarrow Arg\left(z-z_H\right)=-\frac{5\pi}{6}\Leftrightarrow Arg\left(z-z_H\right)=\frac{7\pi}{6}\Leftrightarrow\left(\vec{u},\overrightarrow{HM}\right)=\frac{7\pi}{6}$$

مجموعة النقط هي نصف المستقيم المفتوح الذي مبدؤه H و ميله $\tan g\left(\frac{7\pi}{6}\right)$ و نكتب : $(E)=[HM)-\{H\}$ **0.75**

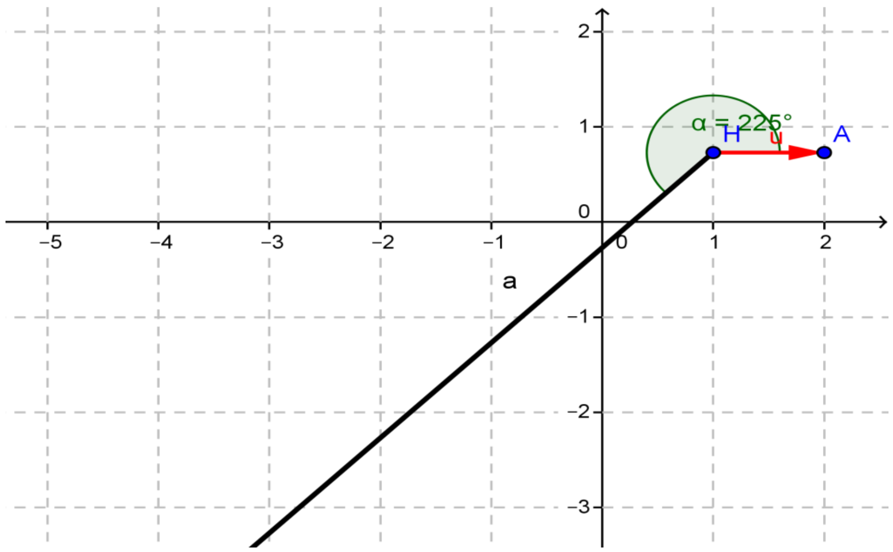


$$4\rangle\ Arg\left(iz+\sqrt{3}-i\right)=-\frac{\pi}{4}\Leftrightarrow Arg\left(i\left(z-\sqrt{3}i-1\right)\right)=-\frac{\pi}{4}\Leftrightarrow Arg\left(i\left(z-\sqrt{3}i-1\right)\right)=-\frac{\pi}{4}$$

$$\Leftrightarrow Arg\left(i\right)+Arg\left(z-1-\sqrt{3}i\right)=-\frac{\pi}{4}\Leftrightarrow\frac{\pi}{2}+Arg\left(z-\left(1+\sqrt{3}i\right)\right)=-\frac{\pi}{4}$$

$$\Leftrightarrow Arg\left(z-z_C\right)=-\frac{3\pi}{4}\Leftrightarrow Arg\left(z-z_C\right)=\frac{5\pi}{4}\Leftrightarrow\left(\vec{u},\overrightarrow{CM}\right)=\frac{5\pi}{4}$$

مجموعة النقط هي نصف المستقيم المفتوح الذي مبدؤه C و ميله $\tan g\left(\frac{5\pi}{4}\right)$ و نكتب : $(E)=[CM)-\{C\}$ **0.75**



التمرين الثاني : 04 نقاط

1) حل في مجموعة الأعداد المركبة $\mathbb{C}$ المعادلة $(z-3+2i)(z^2+6z+10)=0$. **1**

$$(z-3+2i)(z^2+6z+10)=0 \Leftrightarrow z-3+2i=0 \vee z^2+6z+10=0 \quad / \, z_1=3-2i$$

$$\Delta=36-40=-4=4i^2 \quad / \sqrt{\Delta}=2i \quad / \quad z_2=\frac{-6-2i}{2}=-3-i \quad , z_3=\overline{z_2}=-3+i$$

$$S=\{3-2i\ ;-3-i\ ;-3+i\}$$

2) علّم في المستوي المنسوب إلى المعلم المتعامد و المتجانس $(O,\vec{u},\vec{v})$ النقط A , C , D و H ذات اللاحقات

$z_A=3-2i$, $z_C=-3+i$, $z_D=-3-i$, $z_H=1$ على الترتيب . **0.75**

3) z عدد مركب حيث: $\begin{cases} \arg(z-3+2i)=\arg(z-1)+\frac{\pi}{2} \\ |z-3+2i|=|z-1| \end{cases}$

أ- بيّن أنّ الجملة تكافؤ : $\frac{z-3+2i}{z-1}=i$: **0.5**

$$\begin{cases} \arg(z-3+2i)=\arg(z-1)+\frac{\pi}{2} \\ |z-3+2i|=|z-1| \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \arg(z-3+2i)-\arg(z-1)=\frac{\pi}{2} \\ \frac{|z-3+2i|}{|z-1|}=1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \arg\left(\frac{z-3+2i}{z-1}\right)=\frac{\pi}{2} \\ \left|\frac{z-3+2i}{z-1}\right|=1 \end{cases}$$

$$\frac{z-3+2i}{z-1}=1\left(cos\left(\frac{\pi}{2}\right)+isin\left(\frac{\pi}{2}\right)\right)=1(0+i)=i$$

تعيّن قيمة z : **0.25**

$$\frac{z-3+2i}{z-1}=i \Leftrightarrow z-3+2i=iz-i \Leftrightarrow z-iz=3-2i-i \Leftrightarrow z(1-i)=3-3i$$

$$\Leftrightarrow z=\frac{3-3i}{1-i}\cdot\frac{1+i}{1+i}=\frac{3+\cancel{3i}-\cancel{3i}+3}{2}=\frac{6}{2}=3$$

ب- B النقطة التي لاحقتها $z_B=3$, تحقق أنّ $\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{DC}$ **0.25**

$$\begin{cases} \overrightarrow{AB}=z_B-z_A=3-(3-2i)=3-3+2i=2i \\ \overrightarrow{DC}=z_C-z_D=-3+i-(-3-i)=-3+i+3+i=2i \end{cases} \Rightarrow \overrightarrow{AB}=\overrightarrow{DC}$$

- طبيعة الرباعي $ABCD$: بما أنّ $\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{DC}$ فالرباعي $ABCD$ هو : متوازي أضلاع . **0.25**

ج- لتكن K النقطة التي لاحقتها z_K حيث : $z_K=1-2i$

- أكتب على الشكل الأسّي العدد المركب L : **0.5**

$$L=\frac{z_A-z_H}{z_B-z_K}=\frac{3-2i-1}{3-(1-2i)}=\frac{2-2i}{3-1+2i}=\frac{2-2i}{2+2i}\cdot\frac{2-2i}{2-2i}=\frac{4-4-8i}{8}=-i=\left[1;-\frac{\pi}{2}\right]=e^{-i\frac{\pi}{2}}$$

▪ تحقّق أنّ : $\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{KH}$. **0.25**

$$\begin{cases}\overrightarrow{AB}=z_B-z_A=3-(3-2i)=3-3+2i=2i\\ \overrightarrow{KH}=z_H-z_K=1-(1-2i)=1-1+2i=2i\end{cases}\Rightarrow \overrightarrow{AB}=\overrightarrow{KH}$$

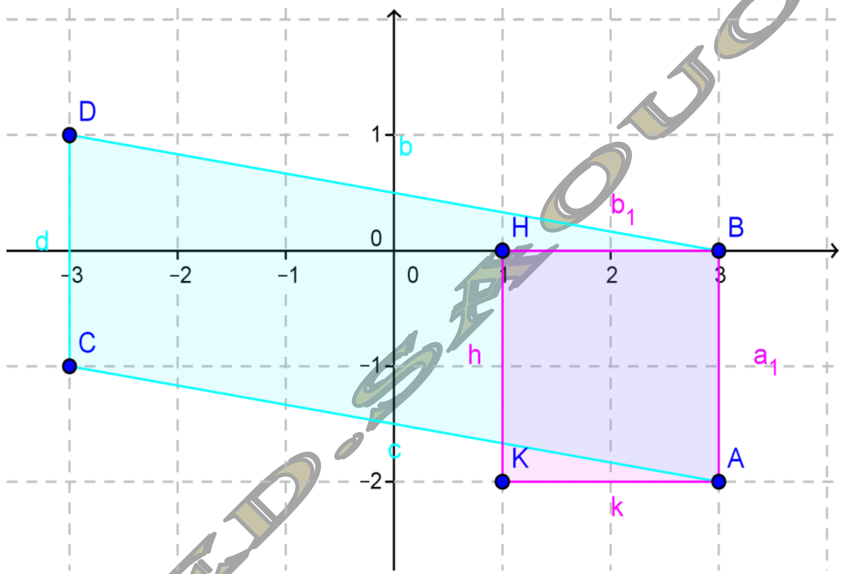
▪ طبيعة الرباعي $ABHK$. **0.25**

لدينا :

$$|L|=1\Leftrightarrow \frac{HA}{KB}=1\Leftrightarrow HA=KB$$

$$arg(L)=-\frac{\pi}{2}\Leftrightarrow(\overrightarrow{KB},\overrightarrow{HA})=-\frac{\pi}{2}\Leftrightarrow(\overrightarrow{HA},\overrightarrow{KB})=\frac{\pi}{2}\Leftrightarrow \overrightarrow{HA}\perp\overrightarrow{KB}$$

بما أنّ : $\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{KH}$ و القطران متساويان و متعامدان فالرباعي $ABHK$ هو : **مربع** .



التمرين الثالث : 05 نقاط

I. f دالّة معرفة على المجال $]0;+\infty[$ بـ : $f(x)=x(lnx)^2$.

(C_f) منحناها البياني في معلم متعامد و متجانس $(O,\vec{i},\vec{j})$ حيث : $\|\vec{i}\|=10cm$, $\|\vec{j}\|=1cm$

(1 أحسب نهاية الدّالّة f عند $+\infty$. **0.25**

$\lim_{x\to+\infty} f(x)=\lim_{x\to+\infty} x(lnx)^2=+\infty$ لأنّ : $\lim_{x\to+\infty} x=+\infty$ و $\lim_{x\to+\infty}(lnx)^2=+\infty$.

(2 أ- بيّن أنّه من أجل كل x من $]0;+\infty[$ فإنّ : $f(x)=4\left(\sqrt{x}ln\sqrt{x}\right)^2$. **0.25**

$$f(x)=4\left(\sqrt{x}ln\sqrt{x}\right)^2=4\left(\sqrt{x}\right)^2\left(ln\sqrt{x}\right)^2=4x\left(\frac{1}{2}lnx\right)^2=4x\left(\frac{1}{4}(lnx)^2\right)=x(lnx)^2=f(x)$$

ب- أحسب $\lim_{x\xrightarrow{>}0} f(x)$. **0.25**

$\lim_{x\xrightarrow{>}0} f(x)=\lim_{x\xrightarrow{>}0} 4\left(\sqrt{x}ln\sqrt{x}\right)^2=0$ لأنّ : $\lim_{x\xrightarrow{>}0}\sqrt{x}ln\sqrt{x}=\lim_{y\xrightarrow{>}0} ylny=0$.

3) أحسب $f'(x)$ و أدرس إشارتها ثمّ شكل جدول التغيرات للدّالة f . **0.25**

f دّالة قابلة للإشتقاق على المجال $]0;+\infty[$ و دّالتها المشتقة هي :

$$f'(x)=(lnx)^2+\cancel{x}\left(2\times\frac{1}{\cancel{x}}\times lnx\right)=(lnx)^2+2lnx=lnx(2+lnx)$$

إشارة المشتقة **0.25**

x	0		e^{-2}		1		$+\infty$
lnx		$-$		$-$	0	$+$	
$2+\ln x$		$-$	0	$+$		$+$	
$f'(x)$	||	$+$	0	$-$	0	$+$	

f دّالة متزايدة تماما على $]0;e^{-2}]\cup[1;+\infty[$ و متناقصة تماما على $[e^{-2};1]$. **0.25**

جدول التغيرات : **0.25**

x	0		e^{-2}		1		$+\infty$
$f'(x)$	||	$+$	0	$-$	0	$+$	
$f(x)$	|| 0	$\nearrow$	$4e^{-2}$	$\searrow$	0	$\nearrow$	$+\infty$

4) أرسم (C_f) في المجال $]0\ ;\ 1]$. **0.5**

II. g دّالة معرفة على المجال $]0;+\infty[$ بـ : $g(x)=-2xlnx$.

(C_g) منحناها البياني في معلم متعامد و متجانس $(O,\vec{i},\vec{j})$ حيث : $\|\vec{i}\|=10cm\ ,\ \|\vec{j}\|=1cm$

5) أحسب نهايتي الدّالة g . **0.25 + 0.25**

$$\lim_{x\xrightarrow{>}0} g(x)=\lim_{x\xrightarrow{>}0} -2xlnx=0 \qquad \lim_{x\to+\infty} g(x)=\lim_{x\to+\infty} -2xlnx=-\infty$$

6) أدرس إتجاه تغيّر الدّالة g , ثمّ شكل جدول تغيراتها .

g دّالة قابلة للإشتقاق على المجال $]0;+\infty[$ و دّالتها المشتقة هي : **0.25**

$$g'(x)=-2lnx-2\cancel{x}\cdot\frac{1}{\cancel{x}}=-2lnx-2 \qquad / \ g'(x)=0\Leftrightarrow -2lnx-2=0\Leftrightarrow lnx=-1\Leftrightarrow x=e^{-1}$$

إشارة المشتقة **0.25**

x	0		e^{-1}		$+\infty$
$-2-2\ln x$		$+$	0	$-$	
$g'(x)$	||	$+$	0	$-$	

g دّالة متزايدة تماما على $]0;e^{-1}]$ و متناقصة تماما على $[e^{-1};+\infty[$. **0.25**

جدول التغيرات : **0.25**

x	0		e^{-1}		$+\infty$
$g'(x)$	||	$+$	0	$-$	
$g(x)$	|| 0	$\nearrow$	$2e$	$\searrow$	$-\infty$

7) بيّن أنّه من أجل كل x من $]0;+\infty[$ فإنّ : $f(x)-g(x)=xf'(x)$. **0.25**

$$\forall x\in]0;+\infty[: \quad f(x)-g(x)=x(\ln x)^2+2x\ln x=x\ln x(\ln x+2)=xf'(x)$$

▪ استنتج الوضعية النسبية للمنحنيين (C_f) و (C_g) . **0.75**

ندرس إشارة الفرق $f(x)-g(x)$ و بما أنّ : $f(x)-g(x)=xf'(x)$ فإنّ إشارة الفرق من إشارة $f'(x)$.

- (C_f) أعلى (C_g) على المجال : $]0;e^{-2}[\cup]1;+\infty[$.
- (C_f) أسفل (C_g) على المجال : $]e^{-2};1[$.
- (C_f) يقطع (C_g) في النقطتين : $C(1;0)$, $B(e^{-2};4e^{-2})$.

8) أرسم (C_g) في المجال $]0\ ;\ 1]$. **0.5**

.III ليكن $x_0\in]0;+\infty[$.

3) بيّن أنّ معادلة المماس (T) لـ : (C_f) عند النقطة ذات الفاصلة x_0 هي : $y=xf'(x_0)+g(x_0)$ **0.5**

$$(T):\ y=f'(x_0)(x-x_0)+f(x_0)=xf'(x_0)-x_0f'(x_0)+f(x_0)$$
$$=xf'(x_0)-(f(x_0)-g(x_0))+f(x_0)$$
$$=xf'(x_0)-f(x_0)+g(x_0)+f(x_0)$$
$$=xf'(x_0)+g(x_0)$$

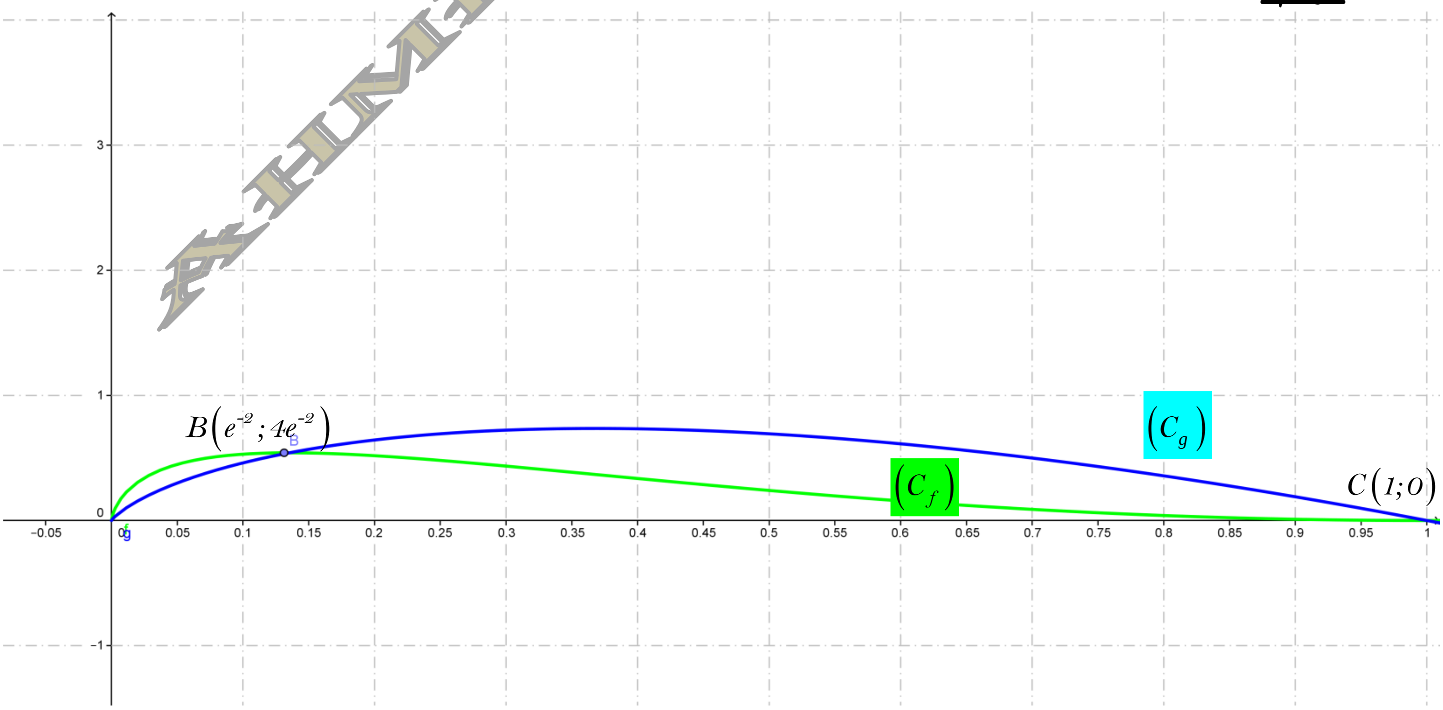
4) عيّن إحداثيي A نقطة تقاطع (T) مع محور التراتيب . **0.25**

لمحور التراتيب معادلة من الشكل : $x=0$. بالتعويض بقيمة x في (T) نجد :

$$y=0f'(x_0)+g(x_0)\Leftrightarrow y=g(x_0)=-2x_0\ln x_0$$

إحداثيي A نقطة تقاطع (T) مع محور التراتيب : $A(0;-2x_0\ln x_0)$.

<u>الرسم :</u>



التمرين الرابع : 04 نقاط

في الفضاء المنسوب الى معلم متعامد ومتجانس $\left(O,\vec{i},\vec{j},\vec{k}\right)$ نعتبر النقط : $A(1;1;0)$, $B(-1;0;2)$, $C(-1;0;1)$.

و المستوي (P) الذي تمثيله الوسيطي : $(P):\begin{cases} x=t+1 \\ y=t+\alpha-2 \\ z=3t+\alpha+3 \end{cases}$ حيث α , t عددان حقيقيان .

1) تحقق أن النقط A , B و C ليست في إستقامية . 0.25

لدينا : $\overrightarrow{AB}(-2;-1;2)$ و $\overrightarrow{AC}(-2;-1;1)$, بما أنّ : $\frac{2}{1}\neq\frac{-1}{-1}$ و فالشعاعين $\overrightarrow{AB}$ و $\overrightarrow{AC}$ غير مرتبطين خطيا

و منه النقط A , B و C ليست في استقامية .

بيّن أنّ $x-2y+1=0$ هي معادلة ديكارتية للمستوي (ABC) . 0.25

لدينا : $x_A-2y_A+1=1-2+1=0$, $x_B-2y_B+1=-1-0+1=0$, $x_C-2y_C+1=-1-0+1=0$

و منه إحداثيات النقط A , B و C تحقق المعادلة $x-2y+1=0$ و بالتالي فهي معادلة ديكارتية للمستوى (ABC) .

2) أكتب معادلة ديكارتية للمستوي (P) 0.5

$\begin{cases} x=t+1 & ....(1) \\ y=t+\alpha-2 & ....(2) \\ z=3t+\alpha+3 & ....(3) \end{cases}$ من (1) نجد : $t=x-1$, بالتعويض في (2) نجد : $\alpha=y-x+3$

بالتعويض بقيمة t و α في (3) نجد : $(P):2x+y-z+3=0$

التحقّق أنّ C نقطة من (P) . 0.25

لدينا : $2x_C+y_C-z_C+3=-2+0-1+3=0$ و منه : $C\in(P)$.

3) أ- تحقق أنّ المستويين (P) و (ABC) متعامدان : 0.25

لدينا : $\vec{n}(2;1;-1)$ شعاع ناظمي للمستوي (P) و $\vec{n'}(1;-2;0)$ شعاع ناظمي للمستوي (ABC) .

بما أنّ : $\vec{n}\cdot\vec{n'}=2(1)+1(-2)+(-1)(0)=2-2=0$ فإنّ $\vec{n}\perp\vec{n'}$ إذن المستويان (P) و (ABC) متعامدان .

عيّن تمثيلا وسيطيا للمستقيم (Δ) مستقيم تقاطعهما . 0.5

لتكن $M(x;y;z)$ نقطة من (Δ) هذا معناه أنّ إحداثياتها تحقق الجملة : $\begin{cases} x-2y+1=0 & ....(1) \\ 2x+y-z+3=0 & ....(2) \end{cases}$

من (1) نجد : $x=2y-1$ بوضع : $y=t'$ نجد : $x=2t'-1$, بالتعويض بقيمة x و y في (2) نجد : $z=5t'+1$.

ومنه : $(\Delta):\begin{cases} x=2t'-1 \\ y=t' \\ z=5t'+1 \end{cases}$, حيث t' عدد حقيقي .

ب- أحسب المسافة بين النقطة A و المستقيم (Δ) . 0.5

بما أنّ : (P) و (ABC) متعامدان و $A\in(ABC)$ فإنّ : $d(A;(\Delta))=d(A;(P))$.

$$d(A;(D))=d(A;(P))=\frac{|2(1)+1-0+3|}{\sqrt{4+1+1}}=\frac{6}{\sqrt{6}}=\sqrt{6}\ UL$$

4) عيّن مجموعة النقط M من الفضاء المتساوية البعد عن كل من (P) و (ABC) . **0.5**

$$d\left(M;(ABC)\right)=d\left(M;(P)\right)\Leftrightarrow \frac{|x-2y+1|}{\sqrt{5}}=\frac{|2x+y-z+3|}{\sqrt{6}}\Leftrightarrow \sqrt{6}\,|x-2y+1|=\sqrt{5}\,|2x+y-z+3|$$

$$\Leftrightarrow \left|\sqrt{6}x-2\sqrt{6}y+\sqrt{6}\right|=\left|2\sqrt{5}x+\sqrt{5}y-\sqrt{5}z+3\sqrt{5}\right|$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases}\sqrt{6}x-2\sqrt{6}y+\sqrt{6}=2\sqrt{5}x+\sqrt{5}y-\sqrt{5}z+3\sqrt{5} & \vee \\ \sqrt{6}x-2\sqrt{6}y+\sqrt{6}=-2\sqrt{5}x-\sqrt{5}y+\sqrt{5}z-3\sqrt{5}\end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases}(Q_1):\quad \left(\sqrt{6}-2\sqrt{5}\right)x-\left(2\sqrt{6}+\sqrt{5}\right)y+\sqrt{5}z+\sqrt{6}-3\sqrt{5}=0\\ (Q_2):\quad \left(\sqrt{6}+2\sqrt{5}\right)x-\left(2\sqrt{6}-\sqrt{5}\right)y-\sqrt{5}z+\sqrt{6}+3\sqrt{5}=0\end{cases}$$

لدينا : $\overrightarrow{n_1}\left(\sqrt{6}-2\sqrt{5}\ ;-2\sqrt{6}-\sqrt{5}\ ;-\sqrt{5}\right)$ شعاع ناظمي للمستوي (Q_1) و

$\overrightarrow{n_2}\left(\sqrt{6}+2\sqrt{5}\ ;-2\sqrt{6}+\sqrt{5}\ ;\sqrt{5}\right)$ شعاع ناظمي للمستوي (Q_2) .

بما أنّ :

$$\overrightarrow{n_1}\cdot\overrightarrow{n_2}=\left[\left(\sqrt{6}\right)^2-\left(2\sqrt{5}\right)^2\right]+\left[\left(2\sqrt{6}\right)^2-\left(\sqrt{5}\right)^2\right]-\left(\sqrt{5}\right)^2=(6-20)+(24-5)-5=-14+19-5=0$$

فإنّ $\overrightarrow{n_1}\perp\overrightarrow{n_2}$ إذن مجموعة النقط هي إتحاد مستويين (Q_1) و (Q_2) متعامدان .

5) لتكن G مرجح الجملة $\left\{(A\,;3),(B\,;\lambda),(C\,;\lambda^2)\right\}$ حيث $\lambda\in\mathbb{R}$.

ب- بين أنه من أجل كل عدد حقيقي α فإن G موجودة . **0.25**

G موجودة معناه : $\lambda^2+\lambda+3\neq 0$ بما أنّ : $\Delta=1-12=-11<0$ فإنّ المعادلة لا تقبل حلول في $\mathbb{R}$.

و منه $\lambda^2+\lambda+3\neq 0$ إذن G موجودة .

ب- عيّن قيمة λ حتى تنتمي G إلى المستقيم (Δ) . **0.25 (إحداثيات G) + 0.5 (قيمة λ)**

لدينا :

$$\begin{cases}x_G=\dfrac{3(x_A)+\lambda(x_B)+\lambda^2(x_C)}{3+\lambda+\lambda^2}=\dfrac{3(1)+\lambda(-1)+\lambda^2(-1)}{\lambda^2+\lambda+3}=\dfrac{3-\lambda-\lambda^2}{\lambda^2+\lambda+3}\\ y_G=\dfrac{3(y_A)+\lambda(y_B)+\lambda^2(y_C)}{3+\lambda+\lambda^2}=\dfrac{3(1)+\lambda(0)+\lambda^2(0)}{\lambda^2+\lambda+3}=\dfrac{3}{\lambda^2+\lambda+3}\\ z_G=\dfrac{3(z_A)+\lambda(z_B)+3(z_C)}{3+\lambda+\lambda^2}=\dfrac{3(0)+\lambda(2)+\lambda^2(1)}{\lambda^2+\lambda+3}=\dfrac{2\lambda+\lambda^2}{\lambda^2+\lambda+3}\end{cases}$$

$$G\left(\frac{3-\lambda-\lambda^2}{\lambda^2+\lambda+3};\frac{3}{\lambda^2+\lambda+3};\frac{2\lambda+\lambda^2}{\lambda^2+\lambda+3}\right)\ ....(1)$$

G تنتمي إلى المستقيم (Δ) معناه :

$$G\left(\ 2t'-1\ ;\ t'\ ;\ 5t'+1\right)\qquad ....(2)$$

من (1) و (2) نستنتج أنّ :

$$\begin{cases}2t'-1=\dfrac{3-\lambda-\lambda^2}{\lambda^2+\lambda+3}...(1)'\\ t'=\dfrac{3}{\lambda^2+\lambda+3}.....(2)'\\ 5t'+1=\dfrac{2\lambda+\lambda^2}{\lambda^2+\lambda+3}...(3)'\end{cases}$$

بتعويض $(2)'$ في $(3)'$ نجد:

$$\frac{15}{\lambda^2+\lambda+3}+1=\frac{2\lambda+\lambda^2}{\lambda^2+\lambda+3} \Leftrightarrow \frac{15+\lambda^2+\lambda+3}{\lambda^2+\lambda+3}=\frac{2\lambda+\lambda^2}{\lambda^2+\lambda+3}$$

$$\Leftrightarrow 18+\lambda^2+\lambda=2\lambda+\lambda^2$$

$$\Leftrightarrow \lambda=18$$