السنة الثالثة علوم تجريبية **تصحيح النموذجي في مادة رياضيات**

التمرين الأول : (04 نقاط)

1. **بقراءة بيانية تعيين :**

$f(-1)=4$ / $f'(-1)=0$ / $g'\left(-\frac{1}{2}\right)=0$

$g'(-1)=-1$ (لان $g'(-1)$ هو معامل توجيه المماس عند الفاصلة -1)

❖ حل في R المتراجحات التالية

أ. $f(x)\geq 0$ هي $x\in[-2;+\infty[$

ب. $f'(x)\geq 0$ ، هي $x\in]-\infty;-1]\cup[1;+\infty[$

جـ . $f(x)\leq g(x)$ هي $x\in]-\infty;-2]\cup[1;2]$

2. تعيين a و b . $a=1$ و $b=1$

التمرين الثاني : (04 نقاط)

1) نعتبر المعادلة التفاضلية $2y'+y=e^{-\frac{x}{2}}(x+1)............(E')$

لتكن دالة معرفة كمايلي : $f(x)=e^{-\frac{x}{2}}(mx^2+px)$

- تعيين العددين الحقيقيين m و p حتى تكون الدالة f حل للمعادلة (E')

لدينا $f(x)=e^{-\frac{x}{2}}(mx^2+px)$

ومنه $f'(x)=e^{-\frac{x}{2}}(-\frac{m}{2}x^2+\frac{4m-p}{2}x+p)$

- الدالة f حلا للمعادلة (E') معناه $2f'(x)+f(x)=e^{-\frac{x}{2}}(x+1)............(E')$

ومنه

$$2e^{-\frac{x}{2}}(-\frac{m}{2}x^2+\frac{4m-p}{2}x+p)+e^{-\frac{x}{2}}(mx^2+px)=e^{-\frac{x}{2}}(x+1)$$

ومنه $m=\frac{1}{4}$ و $p=\frac{1}{2}$

اذن تكون الدالة f حلا للمعادلة (E') اذاوفقط اذا كانت $m=\frac{1}{4}$ و $p=\frac{1}{2}$

2) تعيين مجموعة حلول المعادلة التفاضلية التالية : $2y'+y=0............(E)$

حلول المعادلة التفاضلية $2y'+y=0$ هي الدوال المعرفة على R بمايلي $x\mapsto ce^{-\frac{1}{2}x}$ حيث cعدد حقيقي كيفي

3) نعتبر الدالة g معرفة وقابلة للاشتقاق على R

1− تبيان انه اذا كانت g حل للمعادلة (E') اذا وفقط اذا كانت $g-f$ حلا للمعادلة (E)

اثبات التكافؤ المطلوب

ليكن g حلا للمعادلة التفاضلية (E')

لدينا : $2g'(x)+g(x)=e^{-\frac{x}{2}}(x+1)$ وبمان $2f'(x)+f(x)=e^{-\frac{x}{2}}(x+1)$

فان $2\left(g'(x)-f'(x)\right)+\left(g(x)-f(x)\right)=0$ اذن $g-f$ حلا للمعادلة التفاضلية (E)

ليكن $g-f$ حلا للمعادلة التفاضلية (E)

لدينا $2\left(g'(x)-f'(x)\right)+\left(g(x)-f(x)\right)=0$

اي $2g'(x)+g(x)=2f'(x)+f(x)$

بمان $2f'(x)+f(x)=e^{-\frac{x}{2}}(x+1)$ فان $2g'(x)+g(x)=e^{-\frac{x}{2}}(x+1)$

اذن g حلا للمعادلة التفاضلية (E')

وبالتالي g حل للمعادلة (E') اذا وفقط اذا كانت $g-f$ حلا للمعادلة (E)

❖ اذن حلول المعادلة (E')

ليكن g حل للمعادلة (E') ولدينا $g-f$ حلا للمعادلة (E) فان $g(x)-f(x)=ce^{-\frac{1}{2}x}$

وهذا يعني ان حلول المعادلة (E') هي الدوال $x\mapsto ce^{-\frac{1}{2}x}+e^{-\frac{1}{2}x}(x+1)$

__التمرين الثالث :__ (05 نقاط)

1) التحقق أنه من أجل كل عدد حقيقي x فإن : $(2x+1)(x^2-5x+6)=2x^3-9x^2+7x+6$

2) حل في R المعادلة التالية : $2x^3-9x^2+7x+6=0......(1)$ هي $S=\left\{-\frac{1}{2};3;2\right\}$

3) حل في R كلا من المعادلتين : $2(\ln x)^3-9(\ln x)^2+7\ln x+6=0....(2)$

بالمطابقة مع المعادلة (1) نضع $X=\ln x$ حيث X هي حلول المعادلة (1)

- اذا كانت $X=-\frac{1}{2}$ اي $\ln x=-\frac{1}{2}$ ومنه $x=e^{-\frac{1}{2}}$
- اذا كانت $X=3$ اي $\ln x=3$ ومنه $x=e^3$
- اذا كانت $X=2$ اي $\ln x=2$ ومنه $x=e^2$

ومنه حلول المعادلة (2) هي $S=\left\{e^{-\frac{1}{2}};e^3;e^2\right\}$

$$6e^{-3x}+7e^{-2x}-9e^{-x}+2=0....(3)$$

ومنه $\frac{6}{e^{3x}}+\frac{7}{e^{2x}}-\frac{9}{e^{x}}+2=0$ وبعد توحيد المقام نجد $\frac{2e^{3x}-9e^{2x}+7e^{x}+6}{e^{3x}}=0....(3)$

وعليه $2e^{3x}-9e^{2x}+7e^{x}+6=0$ اي $2(e^{x})^{3}-9(e^{x})^{2}+7e^{x}+6=0$

نضع $X=e^{x}$ حيث X هي حلول المعادلة (1)

- اذا كانت $X=-\frac{1}{2}$ اي $e^{x}=-\frac{1}{2}$ مرفوض لان $e^{x}\succ 0$
- اذا كانت $X=3$ اي $e^{x}=3$ ومنه $x=\ln 3$
- اذا كانت $X=2$ اي $e^{x}=2$ ومنه $x=\ln 2$

ومنه حلول المعادلة (3) هي $S=\{\ln 3;\ln 2\}$

4) حل في R المتراجحة التالية : $2e^{3x}-9e^{2x}+7e^{x}+6\le 0$

من السؤال 1 $2e^{3x}-9e^{2x}+7e^{x}+6=(2e^{x}+1)(e^{2x}-5e^{x}+6)$

اشارتها من اشارة $e^{2x}-5e^{x}+6$ لان $2e^{x}+1\succ 0$

ولدينا $e^{2x}-5e^{x}+6=(e^{x}-3)(e^{x}-2)$

ومنه حلول المتراجحة التالية $2e^{3x}-9e^{2x}+7e^{x}+6\le 0$ هي $x\in[\ln 2;\ln 3]$

<u>التمرين الرابع:</u> (07 نقاط)

I) $g(x)=\ln(e^{-x}+1)-\frac{1}{e^{x}+1}$

1) حساب نهايتي g عند كل من : $+\infty$ و $-\infty$

$\lim_{x\to+\infty} g(x)=\lim_{x\to+\infty}\ln(e^{-x}+1)-\frac{1}{(e^{x}+1)}=0$ لان $\lim_{x\to+\infty}\ln(e^{-x}+1)=0,\ \lim_{x\to+\infty}\frac{1}{(e^{x}+1)}=0$

$\lim_{x\to-\infty} g(x)=\lim_{x\to-\infty}\ln(e^{-x}+1)-\frac{1}{(e^{x}+1)}=+\infty$ لان $\lim_{x\to-\infty}\ln(e^{-x}+1)=+\infty,\ \lim_{x\to-\infty}-\frac{1}{(e^{x}+1)}=-1$

2) التحقق أن مشتقة الدالة g تعطى بالعلاقة : $g'(x)=-\frac{1}{(e^{x}+1)^{2}}$

$g'(x)=\frac{-e^{-x}}{e^{-x}+1}+\frac{e^{x}}{(e^{x}+1)^{2}}$ ومنه $g'(x)=-\frac{1}{(e^{x}+1)^{2}}$

3) كتابة جدول تغيرات الدالة g

$g'(x)\prec 0$ ومنه g متناقصة على R

إشارة $g(x)$ موجبة

II) لدينا $f(x)=e^{x}\ln(1+e^{-x})$

1) حساب نهاية الدالة عند $+\infty$ (يمكنك بوضع: $t=e^{-x}$ اي $x=-\ln t$

$$\lim_{x\to+\infty} f(x)=\lim_{x\to+\infty} e^{x}\ln(1+e^{-x})=\lim_{x\to 0}\frac{\ln(1+t)}{t}=1$$

2) أ- التحقق أنه من أجل كل x حقيقي فإن : $f(x) = -xe^x + e^x\ln(1+e^x)$

$$f(x) = -xe^x + e^x\ln(1+e^x)$$
$$= e^x(-x + \ln(1+e^x)) = e^x(\ln e^{-x} + \ln(1+e^x))$$
$$= e^x(\ln e^{-x}(1+e^x)) = e^x(\ln(1+e^{-x})) = f(x)$$

ب- استنتاج نهاية عند $-\infty$

$$\lim_{x\to-\infty} f(x) = \lim_{x\to-\infty}(-xe^x + e^x\ln(1+e^x)) = 0$$

3) أ- تبيان أن f قابلة للاشتقاق على مجموعة الاعداد الحقيقية

لدينا e^x قابلة للاشتقاق على R و $\ln(1+e^{-x})$ (تركيب دالتين قابلتين للاشتقاق) قابلة للاشتقاق على R ومنه جداء دالتين قابلتين للاشتقاق على R هي دالة قابلة للاشتقاق على مجموعة الاعداد الحقيقية

ب- حساب $f'(x)$

$$f'(x) = e^x\ln(1+e^{-x}) + \frac{-e^xe^{-x}}{1+e^{-x}}$$
$$= e^x\left(\ln(1+e^{-x}) + \frac{-1}{e^x(1+e^{-x})}\right)$$
$$= e^x\left(\ln(1+e^{-x}) + \frac{-1}{(1+e^x)}\right) = e^x g(x)$$

ج- استنتاج اتجاه تغير f اشارة $f'(x)$ هي نفسها اشارة $g(x)$ ومنه $f'(x) \succ 0$

جدول تغيراتها

4) ارسم المنحنى (C_f)