الأستاذ المؤلف : زهير بودور

سلسلة تجربتي مع الرياضيات

لتحضير البكالوريا

الموافقات في Z

للشعب:

رياضيات

تقني رياضي

الطبعة الأولى

الموافقة بترديد n

تعريف

خواص

أمثلة

نشاطات محلولة

تمارين محلولة

تمارين مقترحة

الموافقة بترديد n :

a ، b عددان صحيحان ، n عدد طبيعي

$a \equiv b [n] \iff$ b هو باقي قسمة a على n

$\iff$ a يوافق b بترديد n

$\iff$ $(a-b)$ مضاعف n

$\iff$ يوجد عدد صحيح k

حيث $a - b = kn$

أي $a = b + kn$

(Ex1) * $18 \equiv 3 [5] \iff$ 3 هو باقي قسمة 18 على 5

* $21 \equiv 8 [13] \iff$ 8 هو باقي قسمة 21 على 13

(Ex2) $x \equiv 3 [5] \iff x = 3 + 5k$

خواص الموافقة بترديد n :

$x \equiv 0 [n] \iff$ x مضاعف n

$a \equiv b [n] \iff a - b \equiv 0 [n]$

$a \equiv b [n] \Rightarrow a^k \equiv b^k [n]$

$a \equiv b\,[n] \Leftrightarrow ka \equiv kb\,[n]$

$\left.\begin{array}{l} a \equiv b\,[n] \\ c \equiv d\,[n] \end{array}\right\} \Leftrightarrow ac \equiv bd\,[n]$

$\left.\begin{array}{l} a \equiv b\,[n] \\ c \equiv d\,[n] \end{array}\right\} \Leftrightarrow a+c \equiv (b+d)\,[n]$

$\left.\begin{array}{l} a \equiv b\,[n] \\ b \equiv c\,[n] \end{array}\right\} \Leftrightarrow a \equiv c\,[n]$

EX3 * $a^3 \equiv (-1)\,[n] \Leftrightarrow a^6 \equiv 1\,[n]$

* $a \equiv 3\,[5] \Leftrightarrow a^2 \equiv 4\,[5]$

$\Leftrightarrow a^3 \equiv 2\,[5]$

$\Leftrightarrow a^4 \equiv 1\,[5]$

* $4x \equiv 2\,[5] \Leftrightarrow 16x \equiv 8\,[5]$

$\Leftrightarrow x \equiv 3\,[5]$

$\Leftrightarrow x = 3 + 5k$

(EX4) * $2x \equiv 6\ [8] \Leftrightarrow x \equiv 3\ [8]$

* $x + 2 \equiv 3\ [11] \Leftrightarrow x + 2 + 9 \equiv (3+9)\ [11]$

$\Leftrightarrow x + 11 \equiv 12\ (11)$

$\Leftrightarrow x \equiv 1\ (11)$

$(11 \equiv 0\ (11)\ ,\ 12 \equiv 1\ [11])$

* $2x \equiv 1\ [7] \Leftrightarrow (2x)(4) \equiv (1)(4)\ [7]$

$\Leftrightarrow 8x \equiv 4\ [7]$

$\Leftrightarrow x \equiv 4\ [7]$

$\Leftrightarrow x = 4 + 7K$

* $3x - 5 \equiv 0\ [11] \Leftrightarrow 3x \equiv 5\ [11]$

$\Leftrightarrow 4(3x) \equiv 4(5)\ (11)$

$\Leftrightarrow 12x \equiv 20\ (11)$

$\Leftrightarrow x \equiv 9\ (11)$

$\Leftrightarrow x = 9 + 11K$

$(12 \equiv 1\ (11)\ ,\ 20 \equiv 9\ (11))$

EX5 $x+3 \equiv 2 [7] \iff x+3+4 \equiv (2+4) (7)$

$\iff x \equiv 6 (7)$

$\iff x = 6+7k$

$5x \equiv 3 [7) \iff 15x \equiv 9 (7)$

$\iff x \equiv 2 [7]$

$\iff x = 2+7k$

$3x \equiv 7 (8) \iff 9x \equiv 21 (8)$

$\iff x \equiv 5 (8)$

$\iff x = 5+8k$

$5x+3 \equiv 5 [8) \iff 5x \equiv 2 (8)$

$\iff 25x \equiv 10 (8)$

$\iff x \equiv 2 (8)$

$\iff x = 2+8k$

لأن

$25 \equiv 1 (8)$

$10 \equiv 2 (8)$

نشاط 1 : برهن أن العدد $3^{2n+1}+2^{n+2}$ يقبل القسمة على 7.

أي برهان أن $3^{2n+1}+2^{n+2}\equiv 0\,[7]$

$$3^{2n+1}+2^{n+2} = (3^{2n}\times 3)+(2^{n}\times 2^{2})$$
$$= (3^{2})^{n}\times 3 + (4\times 2^{n})$$
$$= 9^{n}\times 3 + 4\times 2^{n}$$
$$= 2^{n}\times 3 + 2^{n}\times 4$$
$$= (2^{n})(3+4)$$
$$= 7\times 2^{n}$$
$$(9\equiv 2\,[7])$$

ومنه

$$3^{2n+1}+2^{n+2} \equiv 7\times 2^{n}\,[7]$$
$$\equiv 0\,[7]$$
$$(7\equiv 0\,[7])$$

تمرين 2 : عين باقي قسمة العدد 2^{1998} على 5 (1997)

$1997 \equiv 2\ [5]$

ندرس متتالية بواقي قسمة العدد 2^n على 5.

$2^0 \equiv 1\ [5]$, $2^1 \equiv 2\ [5]$, $2^2 \equiv 4\ [5]$

$2^3 \equiv 3\ [5]$, $2^4 \equiv 1\ [5]$

ومنه نعمم النتيجة:

$(2^4)^k \equiv (1)^k\ [5]$

$2^{4k} \equiv 1\ [5]$

$2^{4k+1} \equiv 2\ [5]$

$2^{4k+2} \equiv 4\ [5]$

$2^{4+3} \equiv 3\ [5]$

$2^{4k+4} \equiv 1\ [5]$

نلاحظ مثلا ان $1998 = (4)(494)+2$

أي من الشكل $(4K+2)$

ومنه

$$1997^{1998} \equiv 2^{4K+2} \ [5]$$

$$\equiv 4 \ [5]$$

النتيجة: باقي قسمة

العدد $(1997)^{1998}$ على 5 هو 4

تمرين 3: حل في $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ الجملة

التالية

$$\begin{cases} x \equiv 1 \ [3] \\ x \equiv 2 \ [5] \end{cases}$$

يجب توحيد الموافقة:

$$x \equiv 1 \ [3] \Rightarrow 5x \equiv 5 \ [15]$$

$$x \equiv 2 \ [5] \Rightarrow 3x \equiv 6 \ [15]$$

بالطرح نجد

$$2x \equiv (-1) \ [15]$$

معناه $2x \equiv 14\ [15]$

$x \equiv 7\ (15)$

ومنه الحل المطلوب هو

$x = 7 + 15K$

K عدد صحيح

تمرين: عين باقي قسمة

العدد 8^{237} على 9 .

$8 \equiv (-1)[9] \Leftrightarrow 8^{237} \equiv (-1)^{237}\ (9)$

$\equiv -1\ (9)$

$\equiv 8\ (9)$

باقي قسمة 8^{237} على 9 هو 8 .

ملاحظة:

K عدد زوجي : $(-1)^K = +1$

K عدد فردي : $(-1)^K = -1$

تمرين 5 : عين باقي قسمة العدد 7^{888} على 15

$7 \equiv 7\,(15)$ ، $7^2 \equiv 4\,[15]$

$7^4 \equiv 1\,[15]$

يمكن ملاحظة أن

$888 = (4)(222)$

ومنه

$7^{888} \equiv (7^4)^{222}\,(15)$

$\equiv 1^{222}\,(15)$

$\equiv 1\,(15)$

باقي القسمة هو 1

تمرين 6 : حل في المجموعة $\mathbb{Z}$

المعادلة $x^2 - 3x + 2 \equiv 0\,[5]$

نلاحظ أن $x^2 - 3x + 2 = (x-1)(x-2)$

$x^2-3x+2\equiv 0\,[5] \Leftrightarrow (x-1)(x-2)\equiv 0\,[5]$

$\Leftrightarrow x-1\equiv 0\,[5]$,

أو $x-2\equiv 0\,(5)$

$x-1\equiv 0\,[5] \Rightarrow x=1+5K$

$x-2\equiv 0\,[5] \Rightarrow x=2+5K$

مجموعة الحلول هي

$S_1=\{x \,/\, x=1+5K \,,\, x=2+5K \,,\, K\in\mathbb{Z}\}$

نشاط 7 : إذا كان $a\equiv 5\,[7]$

و $b\equiv 3\,[7]$

عين باقي القسمة على 7 لكل من :

① $2a+5b$

② a^2+11b

③ a^2+3b^2

$a\equiv 5\,[7] \Longrightarrow 2a\equiv 10\,[7]$

$\equiv 3\,[7]$

$a \equiv 5\,[7] \Rightarrow a^2 \equiv 25\,[7]$

$\equiv 4\,[7]$

$b \equiv 3\,[7] \Rightarrow 5b \equiv 15\,[7]$

$\equiv 1\,[7]$

$b \equiv 3\,[7] \Rightarrow 11b \equiv 33\,[7]$

$\equiv 5\,[7]$

$b \equiv 3\,[7] \Rightarrow b^2 \equiv 9\,[7]$

$\equiv 2\,[7]$

$\Rightarrow 3b^2 \equiv 6\,[7]$

1) $2a + 5b \equiv (3+1)\,[7]$

$\equiv 4\,[7]$

باقي القسمة هو 4

2) $a^2 + 11b \equiv (4+5)\,[7]$

$\equiv 2\,[7]$

باقي القسمة هو 2

③ $a^2+3b^2 \equiv (4+6)\ (7)$

$\equiv 10\ (7)$

$\equiv 3\ (7)$

باقي القسمة هو 3

تمارين 82: ① ادرس بواقي قسمة 2^n على 7

②) استنتج باقي قسمة 2004^{2006} على 7

①

$2^0 \equiv 1\ (7)$, $2^1 \equiv 2\ (7)$, $2^2 \equiv 4\ (7)$

$2^3 \equiv 1\ (7)$: العملية دورية والدور 3

تعميم النتيجة

$(2^3)^K \equiv 1\ (7)$

$2^{3K+1} \equiv 2\ (7)$

$2^{3K+2} \equiv 4\ (7)$

$2004 \equiv 2\ (7) \Rightarrow 2004^{2006} \equiv 2^{2006}\ (7)$ (2

$2006 = 3 \times 668 + 2$

$2006 \equiv 2 [3]$

إذن 2006 من الشكل $(3k+2)$

ومنه $2004^{2006} \equiv 2^{3k+2} [7]$

$\equiv 2^2 [7]$

$\equiv 4 [7]$

إذن 4 هو باقي قسمة 2004^{2006} على 7.

<u>نشاط 9</u>: حل في $\mathbb{Z}$ المعادلة

$x \equiv 7 [x-1]$

$(x-1) \in \mathbb{N}^* \Rightarrow x \geq 2$

لدينا كذلك

$x - 1 \equiv 0 [x-1]$

$\Rightarrow x \equiv 1 [x-1]$

ومنه الجملة:

$$\begin{cases} x \equiv 7 [x-1] \\ x \equiv 1 [x-1] \end{cases}$$

بالطرح نجد $6 \equiv 0 [x-1]$

معناه $(x-1)$ يقسم 6 و $x \geq 2$

الحلول هي $x \in \{2, 3, 4, 7\}$

<u>نشاط 10</u>: حل في $\mathbb{Z}$ المعادلة

$$2x - 17 \equiv 0 \ (x-3)$$

$(x-3) \in \mathbb{N}^* \implies x \geq 4$

لدينا كذلك:

$x - 3 \equiv 0 \ [x-3]$

$x \equiv 3 \ (x-3)$

$2x \equiv 6 \ (x-3)$

ومنه الجملة:

$$\begin{cases} 2x \equiv 17 \ (x-3) \\ 2x \equiv 6 \ (x-3) \end{cases}$$

بالطرح نجد

$0 \equiv 11 \ (x-3)$

معناه $(x-3)$ يقسم 11 و $x \geq 4$

الحلول هي

$x \in \{4, 14\}$

تمارين 11: عين الأعداد الطبيعية a بحيث

$3^{2n+1} + a \times 4^{3n+1} \equiv 0 \, [11]$

$3^2 \equiv 9 \, [11]$; $4^3 \equiv 64 \, [11]$

$\equiv 9 \, (11)$

$3^{2n+1} = (3^2)^n \times 3 = 9^n \times 3$

$4^{3n+1} = (4^3)^n \times 4 = 9^n \times 4$

$3^{2n+1} + a \cdot 4^{3n+1} \equiv 0 \, (11)$

$9^n \times 3 + 4a \times 9^n \equiv 0 \, (11)$

$(9^n)\left[3 + 4a\right] \equiv 0 \, (11)$

$3 + 4a \equiv 0 \, (11)$

$4a \equiv (-3) \, (11)$

$4a \equiv 8 \, (11)$

ومنه $a \equiv 2 \ (11)$

الاعداد الطبيعية a المطلوبة

من الشكل $a = 2 + 11k$

و k عدد طبيعي

<u>تمارين 12</u> : برهن ان $2^{4n+1} + 3^{4n+1} \equiv 0 \ [5]$

مهما كان عدد طبيعي n

$$2^{4n+1} + 3^{4n+1} \equiv \left[(2^4)^n \times 2 + (3^4)^n \times 3\right] [5]$$

$$\equiv \left[16^n \times 2 + 81^n \times 3\right] [5]$$

$$\equiv \left[(1^n) \times 2 + (1^n)(3)\right] [5]$$

$$\equiv \left[1 \times 2 + 1 \times 3\right] [5]$$

$$\equiv (2+3) [5]$$

$$\equiv 0 \ [5]$$

تمرين ١ : (BAC)

١) عين بواقي قسمة 4^n على ١١

٢) عين مجموعة الأعداد الطبيعية n

حتى يكون العدد $6 \times 1995^n + 26^{10n+2} + 7$

يقبل القسمة على ١١.

١)
$4^0 \equiv 1 \ (11) \quad , \quad 4^1 \equiv 4 \ (11)$

$4^2 \equiv 5 \ (11) \quad , \quad 4^3 \equiv 9 \ (11)$

$4^4 \equiv 3 \ (11) \quad , \quad 4^5 \equiv 1 \ (11)$

ومنه $4^{5k} \equiv 1 \ (11)$

$4^{5k+1} \equiv 4 \ (11)$

$4^{5k+2} \equiv 5 \ (11)$

$4^{5k+3} \equiv 9 \ (11)$

$4^{5k+4} \equiv 3 \ (11)$

٢) $1995 \equiv 4 \ (11) \Rightarrow 1995^n \equiv 4^n \ (11)$

ولدينا كذلك $26 \equiv 4 \ (11)$

$$26^{10n+2} \equiv 4^{10n+2} \ (11)$$

$$\equiv 4^{2(5n+1)} \ (11)$$

$$\equiv \left(4^{5n+1}\right)^2 (11)$$

$$\equiv 4^2 (11)$$

$$\equiv 5 \ (11)$$

$$6\times 1995^n + 26^{10n+2} + 7 \equiv (6\times 4^n + 5 + 7)\ (11)$$

$$\equiv (6\times 4^n + 12)\ (11)$$

$$\equiv (6\times 4^n + 1)\ (11)$$

ومنه لدينا

$$6\times 1995^n + 26^{10n+2} + 7 \equiv 0\ (11)$$

معناه $6\times 4^n + 1 \equiv 0\ (11)$

$$2(6\times 4^n + 1) \equiv 0\ (11)$$

$$4^n + 2 \equiv 0\ (11)$$

$$4^n \equiv -2\ (11)$$

$$\equiv 9\ (11)$$

وبالتالي

$$\left|\begin{array}{l} n = 5K+3 \\ K \in \mathbb{N} \end{array}\right.$$

تمرين ٤: حل في المجموعة $\mathbb{Z}$

الجملة التالية

$$\begin{cases} x \equiv 3\ [5] \\ x \equiv 1\ [6] \end{cases}$$

نوحيد الموافقة:

$$\begin{cases} 6x \equiv 18\ [30] \\ 5x \equiv 5\ [30] \end{cases}$$

بالطرح نجد

$$x \equiv 13\ (30)$$

$$\left|\begin{array}{l} x = 13 + 30K \\ K \in \mathbb{Z} \end{array}\right.$$

تمرين 3 : (BAC)

1) عين بواقي قسمة 5^n على 7

2) بين أن $26^{6n+5} + 2\times 47^{12n+2} + 3 \equiv 0 (7)$

3) عين قيم n الطبيعية حتى يكون

$26^{6n+5} + 2\times 47^{12n+2} + 5n \equiv 0 (7)$

1) $5^0 \equiv 1 (7)$, $5^1 \equiv 5 (7)$, $5^2 \equiv 4 (7)$

$5^3 \equiv 6 (7)$, $5^4 \equiv 2 (7)$, $5^5 \equiv 3 (7)$

$5^6 \equiv 1 (7)$

تعميم النتيجة:

$5^{6K} \equiv 1 (7)$

$5^{6K+1} \equiv 5 (7)$

$5^{6K+2} \equiv 4 (7)$

$5^{6K+3} \equiv 6 (7)$

$5^{6K+4} \equiv 2 (7)$

$5^{6K+5} \equiv 3 (7)$

2/ $26 \equiv 5 \ (7)$

$26^{6n+5} \equiv 5^{6n+5} \ (7)$

$\equiv 3 \ (7)$

$47 \equiv 5 \ (7)$

$47^{12n+2} \equiv 5^{12n+2} \ (7)$

$\equiv 5^{2(6n+1)} \ (7)$

$\equiv \left(5^{6n+1}\right)^2 \ (7)$

$\equiv 5^2 \ (7)$

$\equiv 4 \ (7)$

$26^{6n+5} + 2 \times 47^{12n+2} + 3 \equiv (3+8+3) \ (7)$

$\equiv 14 \ (7)$

$\equiv 0 \ (7)$

3/ $26^{6n+5} + 2 \times 47^{12n+2} + 5n \equiv 0 \ (7)$

$3 + 8 + 5n \equiv 0 \ (7)$

$5n + 4 \equiv 0 \ (7)$

$5n \equiv (-4)\ (7)$

$5n \equiv 3\ (7)$

$3 \times 5n \equiv 3 \times 3\ (7)$

$n \equiv 2\ (7)$

القيم المطلوبة هي

$n = 2 + 7k$

$k \in \mathbb{N}$

تمرين 4: (BAC)

1) عين بواقي قسمة 3^n و 5^n على 16.

2) عين باقي قسمة العدد

$(2^{1992} + 3^{1993} + 4^{1994} + 5^{1995} + 6^{1996})$ على 16

3) عين الثنائيات الطبيعية

(x, y) حتى يكون

$3^x + 5^y \equiv 0\ [16]$

1)

$3^{4K} \equiv 1 \ (16)$, $5^{4K} \equiv 1 \ (16)$

$3^{4K+\alpha} \equiv 3^{\alpha} \ (16)$, $5^{4K+\beta} \equiv 5^{\beta} \ (16)$

2)

• $2^{1992} = 2^4 \times 2^{1988} = 16 \times 2^{1988}$

$2^{1992} \equiv 0 \ (16)$

• $3^{1993} = 3^{4 \times 498+1} = 3^{4K+1}$

$3^{1993} \equiv 3 \ (16)$

• $4^{1994} = 4^2 \times 4^{1992} = 16 \times 4^{1992}$

$4^{1994} \equiv 0 \ (16)$

• $5^{1995} = 5^{4 \times 498+3} = 5^{4K+3}$

$5^{1995} \equiv 13 \ (16)$

• $6^{1996} = (2 \times 3)^{1996} = 2^{1996} \times 3^{1996}$

$6^{1996} \equiv 0 \ (16)$

ومنه

$2^{1992} + 3^{1993} + 4^{1994} + 5^{1995} + 6^{1996} \equiv (0+3+0+13+0) \ (16)$

$\equiv 0 \ (16)$

3^0	3^1	3^2	3^3
1	3	9	11

5^0	5^1	5^2	5^3
1	5	9	13

(3

$3+13=5+11=16$

$\begin{cases} 3^x \equiv 11\ (16) \\ 5^y \equiv 5\ (16) \end{cases}$ أو $\begin{cases} 3^x \equiv 3\ (16) \\ 5^y \equiv 13\ (16) \end{cases}$

الثنائيات المطلوبة هي

$\begin{cases} x = 3+4K \\ y = 1+4K \end{cases}$ أو $\begin{cases} x = 1+4K \\ y = 3+4K \end{cases}$

تمرين 5: برهن أن

$1^{2003}+2^{2003}+3^{2003}+4^{2003} \equiv 0\,(5)$

$4 \equiv -1\ (5) \Rightarrow 4^{2003} \equiv (-1)^{2003}\ (5)$

معناه

$1^{2003}+4^{2003} \equiv (1^{2003}-1^{2003})\ (5)$

$\equiv 0\ (5)$

$3 \equiv -2 \ (5) \Rightarrow 3^{2003} \equiv (-2)^{2003} \ (5)$

ومنه $2^{2003} + 3^{2003} \equiv (2^{2003} - 2^{2003}) \ (5)$

$\equiv 0 \ (5)$

وبالتالي $1^{2003} + 2^{2003} + 3^{2003} + 4^{2003} \equiv (0+0) \ (5)$

$\equiv 0 \ (5)$

تمرين 6 :

1) عين بواقي قسمة 7^n على 9

2) عين باقي قسمة كل من 7^{2008} و 7^{1429} على 9

3) بين أن العدد $7^n + 12n - 1$ يقبل القسمة على 9

1) $7^0 \equiv 1 \ (9)$, $7^1 \equiv 7 \ (9)$, $7^2 \equiv 4 \ (9)$

$7^3 \equiv 1 \ (9) \Rightarrow 7^{3k} \equiv 1 \ (9)$

$7^{3k+1} \equiv 7 \ (9)$, $7^{3k+2} \equiv 4 \ (9)$

2) $2008 = 3 \times 669 + 1 \Rightarrow 7^{2008} \equiv 7 \ (9)$

$1429 = 3\times 476 + 1 \Rightarrow 7^{1429} \equiv 7\ [9]$

3) يجب دراسة الحالات الثلاثة:

$3K+2$ ، $3K+1$ ، $3K$

- $n = 3K \Rightarrow 7^{3K} + 12(3K) - 1 \equiv (1+0-1)(9)$

$\equiv 0\ (9)$

- $n = 3K+1 \Rightarrow 7^{3K+1} + 12(3K+1) - 1 \equiv (7+3-1)(9)$

$\equiv 0\ (9)$

- $n = 3K+2 \Rightarrow 7^{3K+2} + 12(3K+2) - 1 \equiv (4+24-1)(9)$

$\equiv 0\ (9)$

تمرين 7:

1) عين بواقي قسمة كل من 2^n , 3^n على 7

2) عين باقي قسمة $(2^{2008} + 3^{2008})$ على 7

3) عين الاعداد الطبيعية n التي تحقق

$2^{2008} + 3^{2008} + 2n \equiv 0\ [7]$

4) حل في $\mathbb{N}$ المعادلة $2^x + 3^x \equiv 0\ [7]$

$2^0 \equiv 1\ (7)$	$3^0 \equiv 1\ (7)$
$2^1 \equiv 2\ (7)$	$3^1 \equiv 3\ (7)$
$2^2 \equiv 4\ (7)$	$3^2 \equiv 2\ (7)$
$2^3 \equiv 1\ (7)$	$3^3 \equiv 6\ (7)$
تعميم النتيجة	$3^4 \equiv 4\ (7)$
$2^{3K} \equiv 1\ (7)$	$3^5 \equiv 5\ (7)$
$2^{3K+1} \equiv 2\ (7)$	$3^6 \equiv 1\ (7)$
$2^{3K+2} \equiv 4\ (7)$	تعميم النتيجة
$2^{6K} \equiv 1\ (7)$	$3^{6K} \equiv 1\ (7)$
$2^{6K+1} \equiv 2\ (7)$	$3^{6K+1} \equiv 3\ (7)$
$2^{6K+2} \equiv 4\ (7)$	$3^{6K+2} \equiv 2\ (7)$
$2^{6K+3} \equiv 1\ (7) \Longleftrightarrow$	$3^{6K+3} \equiv 6\ (7)$
$2^{6K+4} \equiv 2\ (7)$	$3^{6K+4} \equiv 4\ (7)$
$2^{6K+5} \equiv 4\ (7)$	$3^{6K+5} \equiv 5\ (7)$

(2

$2008 = 3 \times 669 + 1$

$2008 = 6 \times 334 + 4 \Rightarrow 2^{2008} + 3^{2008} \equiv (2+4)\ (7)$

$\equiv 6\ (7)$

(3

$2^{2008} + 3^{2008} + 2n \equiv 0\ (7)$

$6 + 2n \equiv 0\ (7)$

$2n \equiv -6\ (7)$

$2n \equiv 1\ (7)$

$4 \times 2n \equiv (4 \times 1)\ (7)$

$n \equiv 4\ (7)$

$n = 4 + 7K$

$K \in \mathbb{N}$

4) يجب توحيد الدور : الدور المشترك هو 6

الحل المطلوب هو $n = 6K + 3$

$K \in \mathbb{N}$

تمرين 8 : 1) عين بواقي قسمة 5^n على 13

2) بين أن $18^{4n}+31^{4n+1}+52^{4n+3}-1\equiv 0\ (13)$

3) عين الأعداد الطبيعية n حيث

$$\begin{cases} 10\leq n\leq 40 \\ 18^{4n}+31^{4n+1}+2n\equiv 0\ (13)\end{cases}$$

---

1) $5^0\equiv 1\ (13)$, $5^1\equiv 5\ (13)$, $5^2\equiv 12\ (13)$

$5^3\equiv 8\ (13)$, $5^4\equiv 1\ (13)$

تعميم النتيجة $5^{4k}\equiv 1\ (13)$

$5^{4k+1}\equiv 5\ (13)$

$5^{4k+2}\equiv 12\ (13)$

$5^{4k+3}\equiv 8\ (13)$

2) البرهان كذلك $18\equiv 5\ (13)$

$31\equiv 5\ (13)$

$52\equiv 5\ (13)$

صنة نبز

$$18^{4n} + 31^{4n+1} + 57^{4n+3} - 1 \equiv (1+5+8-1)\ (13)$$

$$\equiv 0\ (13)$$

$$18^{4n} + 31^{4n+1} + 2n \equiv 0\ (13)$$

$$1 + 5 + 2n \equiv 0\ (13)$$

$$2n \equiv -6\ (13)$$

$$2n \equiv 7\ (13)$$

$$7 \times 2n \equiv (7 \times 7)\ (13)$$

$$n \equiv 49\ (13)$$

$$n \equiv 10\ (13)$$

$$n = 10 + 13K$$

$$10 \leq n \leq 40 \Rightarrow K \in \{0, 1, 2\}$$

$K = 0 \Longrightarrow n = 10$

$K = 1 \Rightarrow n = 23$

$K = 2 \Rightarrow n = 36$

تمرين 9 : يعطى العدد $n = \overline{11\alpha 00}_7$

1) عين α حتى يقبل n القسمة على 3

2) = = = = 5

3) = = = = 15

4) نضع الآن $\alpha = 4$ ، اكتب العدد n في النظام العشري

$$n = \alpha \times 7^2 + 7^3 + 7^4 = 49\alpha + 2744$$
$$0 \leq \alpha \leq 6$$

(1)
$$n \equiv 0\ (3) \Rightarrow \alpha + 2 \equiv 0\ (3)$$
$$\Rightarrow \alpha \equiv 1\ (3)$$
$$\Rightarrow \alpha \in \{1, 4\}$$

(2)
$$n \equiv 0\ (5) \Rightarrow 4\alpha + 4 \equiv 0\ (5)$$
$$\Rightarrow \alpha + 1 \equiv 0\ (5)$$
$$\Rightarrow \alpha \equiv 4\ (5)$$

$\alpha = 4$

3) حتى يقبل القسمة على 15 يجب
أن يقبل القسمة على 3 و على 5
في آن واحد.
ومنه القيمة المشتركة هي
$\alpha = 4$

4) $\alpha = 4 \Rightarrow n = \overline{11400}_2$

$\Rightarrow n = 7^4 + 7^3 + 4(7^2)$

$\Rightarrow n = \overline{2940}_{10}$

ملاحظة:

$\left| \begin{array}{l} 49 \equiv 1 \ (3) \\ 2744 \equiv 2 \ (3) \end{array} \right.$

$\left| \begin{array}{l} 49 \equiv 4 \ (5) \\ 2744 \equiv 4 \ (5) \end{array} \right.$

$\left. \begin{array}{l} n \equiv 0 \ (3) \\ n \equiv 0 \ (5) \end{array} \right| \Leftrightarrow n \equiv 0 \ (15)$

تمرين 10: عين باقي قسمة العدد

(-5817) على 251

لدينا

$5817 \equiv 44 \ [251]$

بالضرب في (-1):

$-5817 \equiv (-44) \ [251]$

نعلم كذلك أن $251 \equiv 0 \ [251]$

ومنه

$0 \equiv 251 \ [251]$

فنتحصل على الجملة التالية

$$\begin{cases} -5817 \equiv (-44) \ [251] \\ 0 \equiv 251 \ [251] \end{cases}$$

بالجمع نجد

$-5817 \equiv 207 \ [251]$

ومنه باقي القسمة هو 207

تمرين 11: أثبت أنه من اجل كل عدد طبيعي n لدينا:

$1^{2n+1} + 2^{2n+1} + 3^{2n+1} + 4^{2n+1} \equiv 0 \ [4]$

• $4^{2n+1} = 4^{2n} \times 4 \equiv 0\ [4]$

• $2^{2n+1} = 2^{2n} \times 2 = (2^2)^n \times 2$

$= 4^n \times 2$

$\equiv 0\ [4]$

• $3^{2n+1} \equiv (-1)^{2n+1}\ [4]$

• $1^{2n+1} \equiv 1^{2n+1}\ (4)$

ومنه

$$1^{2n+1} + 2^{2n+1} + 3^{2n+1} + 4^{2n+1} \equiv (1^{2n+1} + 0 - 1^{2n+1} + 0)[4]$$

$$\equiv 0\ (4)$$

<u>تمرين 12</u> : n عدد طبيعي غير معدوم

برر ما يلي :

$7254^n \equiv 0\ [9]$

$3532^n \equiv 0\ (2)$

$1785^n \equiv 0\ (5)$

$51502^n \equiv 0\ (11)$

* مجموع أرقام 7254 هو 18

18 مضاعف 9

وبالتالي $7254 \equiv 0\ [9]$

ومنه $7254^n \equiv 0\ [9]$

* العدد 3532 عدد زوجي

وبالتالي $3532 \equiv 0\ (2)$

ومنه $3532^n \equiv 0\ (2)$

* 1785 يقبل القسمة على 5

$1785 \equiv 0\ [5] \Rightarrow 1785^n \equiv 0\ [5]$

* $51502 \equiv 0\ (11) \Rightarrow 51502^n \equiv 0\ (11)$

تمرين 13 : برهن أنه من أجل كل عدد طبيعي n (ادينا)

$3^{2n} - 2^n \equiv 0\ [7]$

نعلم ان $9 \equiv 2 [7]$

ولدينا $3^{2n} = (3^2)^n = 9^n$

ومنه $3^{2n} \equiv 2^n (7)$

وبالتالي

$$3^{2n} - 2^n \equiv (2^n - 2^n) (7)$$

$$\equiv 0 (7)$$

تمرين 14 : برهن أن $3^{3n+2} + 2^{n+4} \equiv 0 [5]$

- $3^{3n+2} = (3^3)^n \times 3^2 = (27)^n \times 9$

$$\equiv (4 \times 2^n) (5)$$

لأن $9 \equiv 4 (5)$ و $27 \equiv 2 (5)$

- $2^{n+4} = 2^n \times 2^4 = 16 \times 2^n$

$$\equiv 2^n (5)$$

$16 \equiv 1 (5)$

$$3^{3n+2} + 2^{n+4} \equiv (4 \times 2^n + 2^n) (5)$$

$$\equiv 0 (5)$$

تمرين 15 : 1) عين بواقي قسمة 5^n على 13

2) عين العدد الطبيعي n بحيث يكون

العدد $\alpha_n = 5^n + 5^{2n} + 5^{3n} + 5^{4n}$ يقبل

القسمة على 13

---

① $5^1 \equiv 5\ (13)$, $5^0 \equiv 1\ (13)$

$5^3 \equiv 8\ (13)$, $5^2 \equiv 12\ (13)$

$5^4 \equiv 1\ (13) \Rightarrow 5^{4K} \equiv 1\ (13)$

$5^{4K+1} \equiv 5\ (13)$

$5^{4K+2} \equiv 12\ (13)$

$5^{4K+3} \equiv 8\ (13)$

② $n = 4K \Rightarrow \alpha_n \equiv 4\ (13)$

$n = 4K+1 \Rightarrow \alpha_n \equiv 0\ (13)$

$n = 4k+2 \Rightarrow \alpha_n \equiv 0\ (13)$

$n = 4k+3 \Rightarrow \alpha_n \equiv 0\ (13)$

يجب ان يكون n غير مضاعف للعدد 4.

تمرين 16:

1) عين بواقي قسمة كلا من 4^n , 5^n على 9.

2) عين الأعداد الطبيعية n حيث

$$4^n + 5^n \equiv 0\ [9]$$

1) $5^0 \equiv 1\ (9)$, $5^1 \equiv 5\ [9]$

$5^2 \equiv 7\ (9)$, $5^3 \equiv 8\ [9]$

$5^4 \equiv 4\ (9)$, $5^5 \equiv 2\ (9)$, $5^6 \equiv 1\ (9)$

تعميم النتيجة

$5^{6k} \equiv 1 \; [9]$

$5^{6k+1} \equiv 5 \; [9]$

$5^{6k+2} \equiv 7 \; [9]$

$5^{6k+3} \equiv 8 \; [9]$

$5^{6k+4} \equiv 4 \; [9]$

$5^{6k+5} \equiv 2 \; [9]$

$4^{0} \equiv 1 \; (9) \quad , 4^{1} \equiv 4 \; (9) \quad , 4^{2} \equiv 7 \; (9)$

$4^{3} \equiv 1 \; (9)$

تعميم النتيجة

$4^{3k} \equiv 1 \; (9)$

$4^{3k+1} \equiv 4 \; (9)$

$4^{3k+2} \equiv 7 \; (9)$

2) الدور المشترك هو 6 .

$4^{6K} \equiv 1 \ (9) \quad \ldots\ldots \quad 5^{6K} \equiv 1 \ (9)$

$4^{6K+1} \equiv 4 \ (9) \longleftrightarrow 5^{6K+1} \equiv 5 \ (9)$

$4^{6K+2} \equiv 7 \ (9) \quad \ldots\ldots \quad 5^{6K+2} \equiv 7 \ (9)$

$4^{6K+3} \equiv 1 \ (9) \longleftrightarrow 5^{6K+3} \equiv 8 \ (9)$

$4^{6K+4} \equiv 4 \ (9) \quad \ldots\ldots \quad 5^{6K+4} \equiv 4 \ (9)$

$4^{6K+5} \equiv 7 \ (9) \longleftrightarrow 5^{6K+5} \equiv 2 \ (9)$

الاعداد الطبيعية المطلوبة

هي من الشكل

$n = 6K+1$

$n = 6K+3$

$n = 6K+5$

$K \in \mathbb{N}$

تمارين مقترحة :

تمرين 1 :

1) أدرس حسب قيم العدد الطبيعي n باقي قسمة 7^n على 11 ؛

2) برهن أن $(7^{10n} - 1)$ يقبل القسمة على 11 ؛

3) برهن أن العدد $(7^{10n} - 1)$ يقبل القسمة على 66

تمرين 2 : نعطي المجموع

$$S_n = 1 + 2 + 2^2 + 2^3 + \dots + 2^n$$

1) أكتب بدلالة n عبارة S_n

2) ادرس حسب قيم العدد الطبيعي n باقي قسمة 2^n على 7 .

3) استنتج قيم n التي من أجلها يكون S_n قابل القسمة على 7 .

تمرين 3 :

1) ادرس حسب قيم n باقي قسمة كل من 6^n و 3^n على 11.

2) استنتج باقي قسمة كل من 1994^{1414} و 1414^{1994} على 11.

3) بين أنه من أجل كل عدد طبيعي n فإن

$$1994^{1414} + 1414^{1994} + 6^{10n+4} \equiv 0\ (11)$$

تمرين 4 :

1) ادرس بواقي قسمة كل من 3^n و 7^n على 5.

2) استنتج أن

$$2 \times 81^n + 6 \times 7^{12} - 3 \equiv 0\ [5]$$

تمرين 5 : حل في المجموعة $\mathbb{Z}$ ما يلي :

(1) $4x+3 \equiv 10\ [13]$

(2) $\begin{cases} 2x+3y \equiv 5\ [7] \\ 5x+2y \equiv 2\ [7] \end{cases}$

(3) $x^2+4x+14 \equiv 0\ [17]$

4) $3x+5 \equiv 4\ [13]$

5) $x^2-x+6 \equiv 0\ [9]$

تمرين 6 : برهن على ما يلي :

1/ $2^{6n+3}+3^{4n+2} \equiv 0\ [17]$

2/ $2^{n+1}+3^{3n+1} \equiv 0\ [5]$

تمرين 7 :

1) عين بواقي قسمة 7^n على 9

2) برهن أن $7^{2n} \equiv 4^n (9)$

3) عين بواقي قسمة 4^n على 9

4) ما هو باقي قسمة $5^{2014} + 25^{2013}$ على 9 ؟

5) عين الأعداد الصحيحة n التي تحقق $7^{2n} - 7^n + 6 \equiv 0 (9)$

6) عين الثنائيات الطبيعية (x, y) حيث $7^x + 4^y \equiv 2 (9)$