تمرين21 :

نعتبر المتتاليات (u_n) المعرفة بحده الاول $u_0 = 8$ وعلاقة التراجع :

$$u_{n+1} = 2u_n - 3$$

1) لتكن (v_n) المتتالية المعرفة من اجل كل $n \in \mathbb{N}$ كما يلي $v_n = u_n - a$, حيث a عدد حقيقي ثابت

أ) عبر عن v_{n+1} بدلالة v_n و a

ب) عين قيمة العدد الحقيقي a بحث تكون (v_n) متتالية هندسية .

2) لتكن (v_n) متتالية معرفة من اجل $n \in \mathbb{N}$: $v_n = u_n - 3$

أ) عبر عن v_{n+1} بدلالة v_n ،اثبت أن v_n متتالية هندسية وعبر عن v_n بدلالة n.

ب) استنتج عبارة u_n بدلالة n.

ت) احسب $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n$ و $\lim\limits_{n\to+\infty} v_n$

3) ليكن $n \in \mathbb{N}$ عدد طبيعي .

أ) عبر بدلالة n المجموع التالي $S_n = v_0 + v_1 + \dots + v_n$

ب) استنتج المجموع : $S'_n = u_0 + u_1 + \dots + u_n$

حل مقتصر

$u_{n+1} = u_{n+1} - a = 2u_n - 3 - a = 2(u_n - a) + a - 3 / a - 3 = 0; a = 3 / v_{n+1} = 2v_n / v_n = v_0 q^n = 5\times 2^n /$

$u_n = v_n + 3 = 5\times 2^n + 3 / \lim\limits_{n\to+\infty} v_n = +\infty; \lim\limits_{n\to+\infty} u_n = +\infty / s_n 5(2^{n+1} - 1) /$

$s'_n = (v_0 + 3) + (v_1 + 3) + (v_2 + 3) + \dots\dots + (v_n + 3) = (n+1)\times 3 + s_n = (n+1)\times 3 + 5(2^{n+1} - 1)$

الاســــــتدلال بالـــــتراجع

التمرين22 :

برهن بالتراجع أن من اجل كل عدد طبيعي n : $4^n + 2$ مضاعف 3

حل مقتصر

$n = 0; 4^0 + 2 = 1 + 2 = 3; / p(n) = 3K, K \in \mathbb{N} /$

$p(n+1): 4^{n+1} + 2 = 4^n \times 4 + 2 = 4^n \times 4 + 8 - 8 + 2$

$p(n+1): 4(4^n + 2) - 6 = 4\times 3K - 6 = 3(4K - 2) = 3K'$

التمرين 23 :

ا)برهن بالتراجع أن من اجل كل عدد طبيعي n :

$$0^3 + 1^3 + 2^3 + \dots\dots + n^3 = \left[\frac{n(n+1)}{2}\right]^2$$

ب)استنتج المجموع حيث : $S_n = 2^3 + 4^3 + 6^3 + \dots\dots + (2n)^3$

حل مقتصر

$p(n+1): 0^3 + 1^3 + \dots + n^3 + (n+1)^3 = p(n) + (n+1)^3 = \left[\frac{n(n+1)}{2}\right]^2 + (n+1)^3 = \frac{n^2(n+1)^2 + 4(n+1)^3}{4}$

$0^3 + 1^3 + \dots + n^3 + (n+1)^3 = \frac{(n+1)^2(n+2)^2}{4}$

$(2\times 0)^3 + (2\times 1)^3 + \dots + (2\times 0)^3 = (2)^3\times(0)^3 + (2)^3\times(1)^3 + \dots + (2)^3\times(n)^3 = (2)^3\times\left((0)^3 + (1)^3 + \dots + (n)^3\right)$

$2^3 + 4^3 + 6^3 + \dots + (2n)^3 = 2^3 \times \left[\frac{n(n+1)}{2}\right]^2$

التمرين 24 :

نضع : $S_n = (0\times 1) + (1\times 2) + (2\times 3) + \dots\dots + [n(n+1)]$

1) حسب : S_3, S_2, S_1, S_0

2)برهن بالتراجع أن من اجل كل عدد طبيعي n :

$$S_n = \frac{1}{3}n(n+1)(n+2)$$

حل مقتصر

$$p(n):(0\times1)+(1\times2)+(2\times3)+.......+[n(n+1)]=\frac{1}{3}n(n+1)(n+2)$$

$$p(n+1):\overleftrightarrow{(0\times1)+(1\times2)+(2\times3)+......[n(n+1)]}+[(n+2)(n+1)]$$

$$p(n+1):\overleftrightarrow{p(n)}+[(n+2)(n+1)]$$

$$p(n+1):\frac{1}{3}n(n+1)(n+2)+[(n+2)(n+1)]$$

$$p(n+1):\frac{1}{3}(n+1)(n+2)(n+3)$$

تخمين متتالية واستدلال بالتراجع .

التمرين 25 :

نعتبر المتتالية (u_n) المعرفة من اجل كل عدد طبيعي n بـــ : $u_0 = 0$ و

$$u_{n+1} = 2u_n + 1$$

1) احسب الحدود الخمسة الأولى لهذه المتتالية

2) أعط تخمنا لعبارة u_n بدلالة nثم برهن بالتراجع صحة هذا التخمين.

حل مقتصر

$u_0 = 0; u_1 = 1; u_2 = 3; u_3 = 7; u_4 = 15 / u_n = 2^0 + 2^1 + 2^2 + ... + 2^{n-1} = 2^n - 1/$

$u_n = 2^n - 1; u_{n+1} = 2^{n+1} - 1, u_{n+1} = 2u_n + 1, u_{n+1} = 2(2^n - 1) + 1 = 2\times2^n - 2 + 1 = 2^{n+1} - 1$

تمرين26 :

نعتبر المتتالية (u_n) المعرفة على IN ب :

$$\begin{cases} u_0 = 2 \\ u_{n+1} = 1 + \dfrac{1}{u_n + 1} \end{cases}$$

1) بين بالتراجع انه من اجل كل n من IN : $1 \le u_n \le 2$

$u_0 = 2, 1 \le 2 \le 2, 1 \le u_n \le 2 / 1 \le u_{n+1} \le 2$,

$1 + \frac{1}{3} \le 1 + \frac{1}{u_n + 1} \le 1 + \frac{1}{2}, 1 \le \frac{4}{3} \le 1 + \frac{1}{u_n + 1} \le \frac{3}{2} \le 2$

تمرين27 :

نعتبر المتتالية (u_n) المعرفة ب : $u_0 = 3$ و من اجل كل $n \in IN$:

$$u_{n+1} = 4\left(\frac{-1}{u_n} + 1\right)$$

1) برهن بالتراجع من اجل كل $n \in IN$: $u_n \succ 2$

2) ادرس اتجاه تغيرات المتتالية (u_n). ماذا تستنتج ؟

3) نعتبر المتتالية $(v_n)_{n\in IN}$ المعرفة كما يلي : $v_n = \dfrac{1}{u_n - 2}$

أ) اثبت ان المتتالية (v_n)حسابية يطلب تعيين حدها الأول v_0 و أساسها .

ب) احسب v_n بدلالة n ثم عين نهاية (u_n) ماذا يمكنك استنتج ؟

4)
