* الاشتقاقية *

* الاشتقاقية عند نقطة :

* لتكن f دالة معرفة على مجال مفتوح مركزه x_0 . إذا كان : $\lim_{x \to x_0} \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} = l \in \mathbb{R}$ ، فإننا نقول إن f قابلة للاشتقاق في النقطة x_0 ؛ والعدد الحقيقي l يسمى العدد المشتق للدالة f في النقطة x_0 ويرمز له بالرمز $f'(x_0)$ أو $\frac{df}{dx}(x_0)$ ؛ ونكتب $\boxed{f'(x_0) = \lim_{x \to x_0} \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}}$ ولدينا أيضا :

$\boxed{f'(x_0) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}}$ وذلك بوضع : $h = x - x_0$ ، $\underset{x \to x_0}{h \to 0}$.

* لتكن f دالة معرفة على مجال $[x_0, x_0+\alpha[$ حيث $\alpha > 0$. إذا كان : $\lim_{\substack{x \to x_0 \\ >}} \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} = l \in \mathbb{R}$ ، فإننا نقول إن f قابلة للاشتقاق على <u>اليمين</u> في النقطة x_0 ؛ والعدد الحقيقي l يسمى العدد المشتق على اليمين للدالة f في النقطة x_0 ويرمز له بالرمز $f'_d(x_0)$ ونكتب: $\boxed{f'_d(x_0) = \lim_{\substack{x \to x_0 \\ >}} \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}}$

* لتكن f دالة معرفة على مجال $]x_0-\alpha, x_0]$ حيث $\alpha > 0$. إذا كان : $\lim_{\substack{x \to x_0 \\ <}} \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} = l \in \mathbb{R}$ ، فإننا نقول إن f قابلة للاشتقاق على <u>اليسار</u> في النقطة x_0 ؛ والعدد الحقيقي l يسمى العدد المشتق على اليسار للدالة f في النقطة x_0 ويرمز له بالرمز $f'_g(x_0)$ ونكتب : $\boxed{f'_g(x_0) = \lim_{\substack{x \to x_0 \\ <}} \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}}$

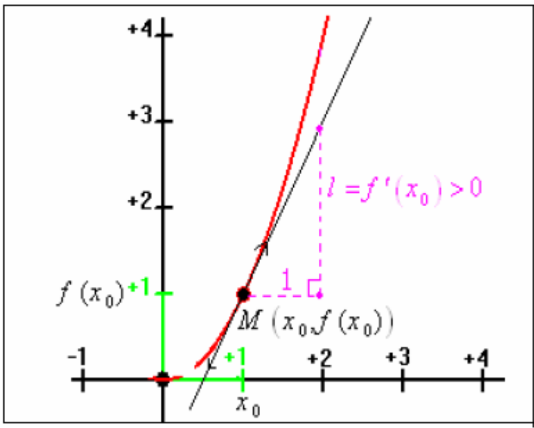
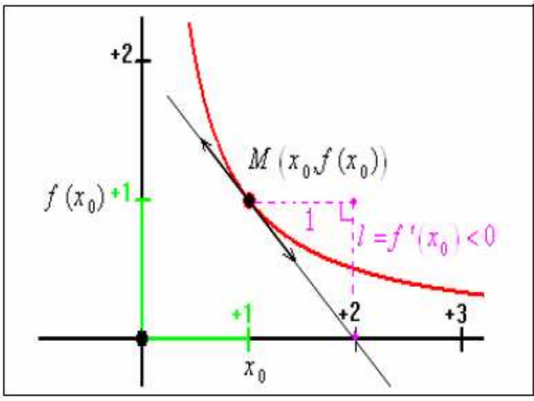
* التفسير الهندسي للاشتقاقية عند نقطة :

* لتكن f دالة قابلة للاشتقاق في نقطة x_0 ؛ و (C_f) منحناها في المستوى المنسوب إلى معلم $(O,\vec{i},\vec{j})$ المستقيم (Δ) ذو المعادلة: $\boxed{y = f'(x_0)(x-x_0)+f(x_0)}$ يسمى **<u>المماس</u>** للمنحنى (C_f) في النقطة التي فاصلتها x_0 .

((Δ) هو المستقيم المار من النقطة $M(x_0, f(x_0))$ والذي **معامل توجيهه** هو $f'(x_0)$)

* لتكن f دالة قابلة للاشتقاق على اليمين في نقطة x_0 ؛ و $(\mathcal{C}_f)$ منحناها في المستوى المنسوب إلى معلم $(O,\vec{i},\vec{j})$. نصف المستقيم (Δ) ذو المعادلة: $\boxed{(\Delta):\begin{cases} y=f_d'(x_0)(x-x_0)+f(x_0) \\ x\geq x_0 \end{cases}}$ يسمى نصف المماس للمنحنى $(\mathcal{C}_f)$ في النقطة التي فاصلتها x_0 .

* لتكن f دالة قابلة للاشتقاق على اليسار في نقطة x_0 ؛ و $(\mathcal{C}_f)$ منحناها في المستوى المنسوب إلى معلم $(O,\vec{i},\vec{j})$. نصف المستقيم (Δ) ذو المعادلة : $\boxed{(\Delta):\begin{cases} y=f_g'(x_0)(x-x_0)+f(x_0) \\ x\leq x_0 \end{cases}}$ يسمى نصف المماس للمنحنى $(\mathcal{C}_f)$ في النقطة التي فاصلتها x_0.

$\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}=l>0$	$(\mathcal{C}_f)$ يقبل مماسا في النقطة التي فاصلتها x_0 ؛ معادلته : $y=f'(x_0)(x-x_0)+f(x_0)$	
$\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}=l<0$	$(\mathcal{C}_f)$ يقبل مماسا في النقطة التي فاصلتها x_0 ؛ معادلته : $y=f'(x_0)(x-x_0)+f(x_0)$	

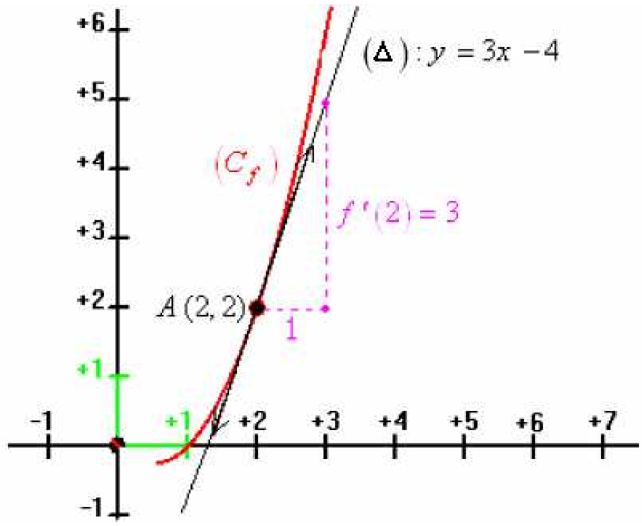
- مثال :

$f(x)=x^2-x$ ، $x_0=2$.

لدينا : $f(2)=2$ و $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{f(x)-f(2)}{x-2}=3$ ؛ إذن : f قابلة للاشتقاق في النقطة 2 و $\boxed{f'(2)=3}$

ومنه فإن $(\mathcal{C}_f)$ يقبل مماسا في النقطة التي فاصلتها 2 معادلته :

$$y=f'(2)(x-2)+f(2) \Leftrightarrow y=3(x-2) \Leftrightarrow \boxed{y=3x-4}$$



* الاشتقاقية على مجال :

تكون f قابلة للاشتقاق على مجال I ؛ إذا كانت قابلة للاشتقاق في كل نقطة من المجال I .

* العمليات على الدوال المشتقة :

* لتكن f و g دالتين قابلتين للاشتقاق على مجال I وليكن $\alpha \in \mathbb{R}$ و $\beta \in \mathbb{R}$. الدوال $f + g$ و $f - g$ و $f \times g$ و $\alpha f + \beta g$ و αf هي دوال قابلة للاشتقاق على المجال I .

* لتكن f و g دالتين قابلتين للاشتقاق على مجال مفتوح I حيث $\forall x \in I : g(x) \neq 0$. الدالتين $\frac{1}{g}$ و $\frac{f}{g}$ هما دالتين قابلتين للاشتقاق على المجال I .

* إذا كانت f دالة قابلة للاشتقاق على مجال مفتوح I وكان $\forall x \in I : f(x) > 0$ ؛ فإن $\sqrt{f} : x \mapsto \sqrt{f(x)}$ تكون دالة قابلة للاشتقاق على المجال I .

* المشتقة الثانية :

المشتقة الثانية f'' هي مشتقة الدالة f' .

* تغيرات دالة :

f متزايدة على مجال I	$\Leftrightarrow \quad \forall x \in I :\ f'(x) \geq 0$
f متزايدة تماما على مجال I	$\Leftrightarrow \quad \forall x \in I :\ f'(x) > 0$
f متناقصة على مجال I	$\Leftrightarrow \quad \forall x \in I :\ f'(x) \leq 0$
f متناقصة تماما على مجال I	$\Leftrightarrow \quad \forall x \in I :\ f'(x) < 0$
f ثابتة على مجال I	$\Leftrightarrow \quad \forall x \in I :\ f'(x) = 0$

* القيم الحدية لدالة :

ـ القيمة الحدية الصغرى :

f قابلة للاشتقاق على مجال مفتوح مركزه x_0 .

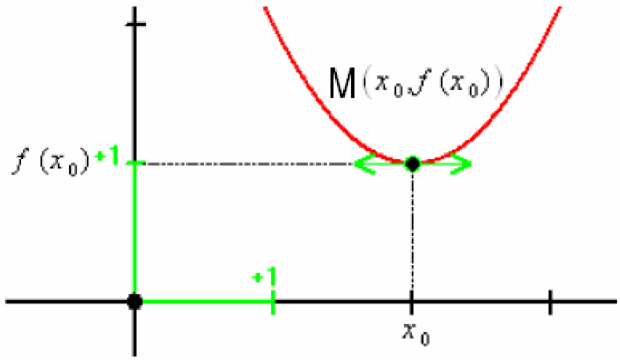
إذا كانت f' تنعدم في x_0 وتغير إشارتها بجوار x_0 ؛

فإن النقطة $M(x_0, f(x_0))$ ذروة للدالة f .

x		x_0	
$f'(x)$	-	0	+
$f(x)$	$\searrow$	$f(x_0)$	$\nearrow$

$f(x_0)$ هي قيمة حدية صغرى للدالة f عند العدد x_0

.../...



ـ القيمة الحدية العظمى :

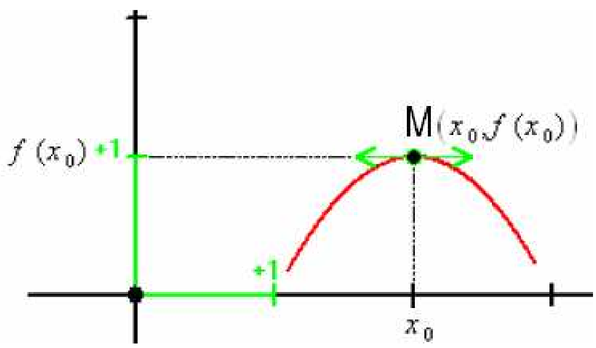
f قابلة للاشتقاق على مجال مفتوح مركزه x_0 .

إذا كانت f' تنعدم في x_0 وتغير إشارتها بجوار x_0 ؛

فإن النقطة $M(x_0, f(x_0))$ ذروة للدالة f .

x	x_0
$f'(x)$	+ 0 -
$f(x)$	↗ $f(x_0)$ ↘

$f(x_0)$ هي قيمة حدية عظمى (كبرى) للدالة f عند العدد x_0

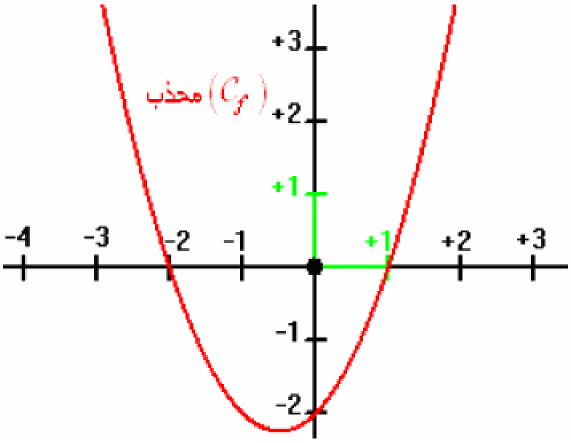


* التحدب و التقعر :

* المنحنى (C_f) **محدب** على مجال I ؛ إذا كان يوجد فوق جميع مماساته على I

$$\Updownarrow$$

f دالة قابلة للاشتقاق مرتين على I ؛ و $\boxed{\forall x \in I : f''(x) \geq 0}$



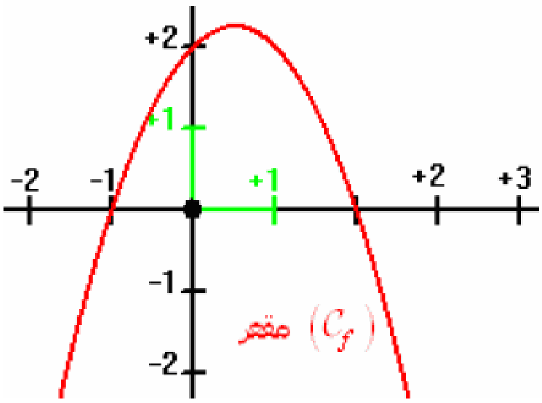
x	مجال
$f''(x)$	+
تقعر (C_f)	محدب

---

* المنحنى (C_f) **مقعر** على مجال I ؛ إذا كان يوجد تحت جميع مماساته على I

$$\Updownarrow$$

f دالة قابلة للاشتقاق مرتين على I ؛ و $\boxed{\forall x \in I : f''(x) \leq 0}$



x	مجال
$f''(x)$	-
تقعر (C_f)	مقعر

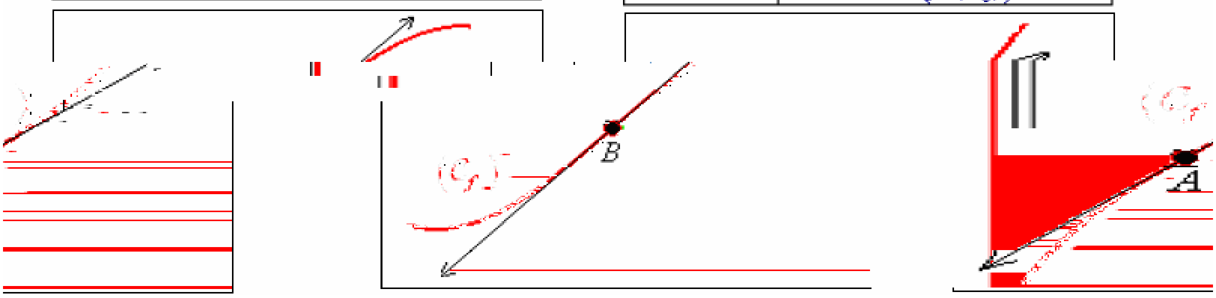
* نقط الانعطاف :

***** نقول إن نقطة $M\left(x_0, f\left(x_0\right)\right)$ ، **نقطة انعطاف** لمنحنى $\left(C_f\right)$ ؛ إذا كان $\left(C_f\right)$ يغير تقعره بجوار النقطة M ؛

أي : إذا كانت f'' تنعدم في x_0 وتغير إشارتها بجوار x_0 .

x		x_0	
$f''(x)$	$-$	0	$+$
تقعر $\left(C_f\right)$	مقعر	$A\begin{pmatrix} x_0 \\ f\left(x_0\right) \end{pmatrix}$	محدب

x		x_0	
$f''(x)$	$+$	0	$-$
تقعر $\left(C_f\right)$	محدب	$B\begin{pmatrix} x_0 \\ f\left(x_0\right) \end{pmatrix}$	مقعر



---

* **المرجع :** وثيقة الحيان

---

* عن منتديات نهاري :
Nehari.homegoo.com

* و الموقع :
Nehari.net