

الموضوع الثاني

التمرين الأول: 5 نقاط

الفضاء منسوب إلى معلم متعامد ومتجانس $(O; \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$

نعتبر النقط $A(0;0;1)$ ، $B(2;2;-1)$ ، $C(-2;-7;-7)$ و $D(-3;4;4)$

و المستوي (P) المعروف بالتمثيل الوسيطى: $\begin{cases} x=1+3\alpha+\beta \\ y=1-2\alpha \\ z=4+\alpha+\beta \end{cases}$ ، α و β وسيطيان حقيقيان.

1. أ - بين أن النقط A ، B و C تعين مستويا.

ب - تحقق أن الشعاع $\vec{n}(3;-2;1)$ ناظمي للمستوي (ABC) ، ثم اكتب معادلة ديكارتية له.

2. أ - اكتب معادلة ديكارتية للمستوي (P) ، ثم بين أن المستويين (ABC) و (P) متعامدان .

ب - بين أن تقاطع (ABC) و (P) هو المستقيم (Δ) ذو التمثيل الوسيطى:

$$\begin{cases} x=-2+t \\ y=-7+4t; t \in \mathbb{R} \\ z=-7+5t \end{cases}$$

ج - احسب المسافة بين النقط D والمستوي (ABC) ، والمسافة بين النقط D والمستوي (P) ، ثم استنتج

المسافة بين النقط D والمستقيم (Δ)

3. (Q) المستوي الذي يشمل النقط D والعمودي على كل من المستويين (ABC) و (P) .

أ - اكتب معادلة ديكارتية للمستوي (Q) .

ب - بين أن المستويات الثلاثة (ABC) ، (P) و (Q) تتقاطع في نقطة واحدة H ، ثم عيّن إحداثيات H .

ج - احسب بطريقة ثانية، المسافة بين النقط D والمستقيم (Δ) .

التمرين الثاني:

نعتبر في مجموعة الأعداد المركبة $\mathbb{C}$ المعادلة: $z^3 - 3z^2 + 3z + 7 = 0$.

(1) بين أن العدد -1 حلا لهذه المعادلة، ثم جد الحلين الآخرين.

(2) المستوي المركب منسوب إلى المعلم المتعامد والمتجانس $(O; \vec{u}, \vec{v})$ لتكن النقط: A ، B ، C ، G لواحقها

على الترتيب: z_1 ، z_2 ، z_3 و z_4 حيث $z_1 = -1$ ، $z_2 = 2 + \sqrt{3}i$ ، $z_3 = 2 - \sqrt{3}i$ و $z_4 = 3$.

- اكتب العدد $\frac{z_1 - z_3}{z_4 - z_3}$ على الشكل الأسى، ثم استنتج طبيعة المثلث ACG .

(3) نسمة (γ) مجموعة النقط M من المستوي التي تحقق: $(1) \dots \dots \dots \overrightarrow{CG} = -\overrightarrow{MA} + 2\overrightarrow{MB} + 2\overrightarrow{MC}$.

أ - أثبت أن G هي مرجح الجملة: $\{(A; -1); (B; 2); (C; 2)\}$.

ب - بين أن المساواة (1) يمكن كتابتها على الشكل $(2) \dots \dots \dots \overrightarrow{GM} \cdot \overrightarrow{CG} = -4$.

ج - تأكد أن النقط A تنتمي إلى المجموعة (γ) .

د - بين أنه يمكن كتابة المساواة (2) على الشكل $\overrightarrow{AM} \cdot \overrightarrow{CG} = 0$ ، ثم استنتج طبيعة (γ) وارسمها.

التمرين الثالث:

I - الدالة g معرفة على $\mathbb{R}$ بـ: $g(x) = 1 + (x^2 - 1)e^{-x}$.

1. أ - احسب $\lim_{x \rightarrow +\infty} g(x)$ و $\lim_{x \rightarrow -\infty} g(x)$.

ب - ادرس اتجاه تغير الدالة g ، ثم شكّل جدول تغيراتها. (نأخذ: $g(1 - \sqrt{2}) \approx -0,25$ و $g(1 + \sqrt{2}) \approx 1,43$)

2. أ - بين أن المعادلة $g(x) = 0$ تقبل حلين في $\mathbb{R}$ ، ثم تحقّق أنّ أحدهما معدوم والآخر α حيث: $-0,8 < \alpha < -0,7$.

ب - استنتج إشارة $g(x)$ ؛ حسب قيم العدد الحقيقي x .

II - الدالة f معرفة على $\mathbb{R}$ بـ: $f(x) = x - (x+1)^2 e^{-x}$.

(C_f) المنحنى الممثل للدالة f في المستوي المنسوب إلى المعلم المتعامد والمتجانس $(O; \vec{i}, \vec{j})$.

1. أ - احسب $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$ و $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x)$.

ب - بين أن المستقيم (Δ) ذا المعادلة $y = x$ ، مقارب مائل للمنحنى (C_f) عند $+\infty$.

ج - ادرس وضعية المنحنى (C_f) بالنسبة إلى المستقيم (Δ) .

2. أ - بين أنه، من أجل كل عدد حقيقي x ، $f'(x) = g(x)$. (يرمز f' إلى الدالة المشتقة للدالة f).

ب - شكّل جدول تغيرات الدالة f على $\mathbb{R}$. (نأخذ: $f(\alpha) \approx -0,9$)

3. أ - بين أن المنحنى (C_f) يقبل مماسين، معامل توجيه كل منهما يساوي 1، يطلب تعيين معادلة لكل منهما.

ب - ممثّل (Δ) والمماسين والمنحنى (C_f) .

ج - ناقش بياناً، حسب قيم الوسيط الحقيقي m ، عدد حلول المعادلة ذات المجهول x : $(x+1)^2 + me^x = 0$.

التمرين الرابع:

I - الدالة العددية g معرفة على $]0; +\infty[$ بـ: $g(x) = 1 - x^2 - \ln x$.

1. ادرس اتجاه تغير الدالة g .

2. احسب $g(1)$ ثم استنتج تبعاً لقيم x إشارة $g(x)$.

II - الدالة العددية f معرفة على $]0; +\infty[$ بـ: $f(x) = x - 1 - \frac{\ln x}{x}$.

1. أ - احسب $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$.

ب - احسب $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x)$ ، ثم فسّر النتيجة هندسياً.

2. أ - بين أنه من أجل كل x من $]0; +\infty[$ فإن $f'(x) = \frac{-g(x)}{x^2}$ ثم استنتج اتجاه تغير الدالة f .

ب - شكّل جدول تغيرات الدالة f .

3. أ - بين أن المستقيم (D) الذي معادلته $y = x - 1$ مقارب مائل للمنحنى (C_f) .

ب - ادرس وضعية (C_f) بالنسبة إلى (D) .

4. بين أن المستقيم (Δ) ذا المعادلة $y = x - 1 - \frac{1}{e}$ يمسّ المنحنى في نقطة A يطلب تعيين إحداثياتها.

5. ارسم (Δ) ، (D) و (C_f) .

حل الموضوع الثاني

التمرين الأول:

1. أ - إثبات أن النقط A, B, C تعين مستويا.

$$\text{لدينا } \overrightarrow{AB} (2; 2; -2) \text{ و } \overrightarrow{AC} (-2; -7; -8) \text{ و } \frac{-2}{2} \neq \frac{-7}{2}$$

إذن الشعاعان $\overrightarrow{AB}$ و $\overrightarrow{AC}$ غير مرتبطين خطيا ومنه النقط A, B, C تعين مستويا.ب - التحقق أن الشعاع $\vec{n} (3; -2; 1)$ ناظمي للمستوي (ABC) ، ثم كتابة معادلة ديكارتية له.

$$\text{لدينا } \vec{n} \cdot \overrightarrow{AB} = 3(2) - 2(2) - 2 = 0 \text{ و } \vec{n} \cdot \overrightarrow{AC} = 3(-2) - 2(-7) - 8 = 0$$

ومنه $\vec{n}$ عمودي على كل من الشعاعين $\overrightarrow{AB}$ و $\overrightarrow{AC}$ وبالتالي $\vec{n}$ ناظم للمستوي (ABC) .معادلة المستوي (ABC)

$$(ABC) \text{ هو مجموعة النقط } M(x; y; z) \text{ من الفضاء بحيث } \overrightarrow{AM} \cdot \vec{n} = 0 \text{ و } \overrightarrow{AM}(x; y; z - 1)$$

$$\overrightarrow{AM} \cdot \vec{n} = 0 \text{ معناه } 3x - 2y + z - 1 = 0 \text{ وهي معادلة للمستوي } (ABC).$$

2. أ - كتابة معادلة ديكارتية للمستوي (P) ، ثم تبين أن المستويين (ABC) و (P) متعامدان.

$$\begin{cases} x = 1 + 3\alpha + \beta \dots\dots\dots (1) \\ y = 1 - 2\alpha \dots\dots\dots (2) \\ z = 4 + \alpha + \beta \dots\dots\dots (3) \end{cases} \text{ لدينا}$$

$$\text{بجمع (1) و (2) نجد } x + y = 2 + \alpha + \beta \text{ ومنه } x + y - 2 = \alpha + \beta$$

$$\text{ولدينا من (3) } z - 4 = \alpha + \beta \text{ ومنه } z - 4 = x + y - 2 \text{ و عليه } x + y - z + 2 = 0 \text{ هي}$$

$$\text{معادلة ديكارتية للمستوي } (P).$$

تبين أن المستويين (ABC) و (P) متعامدان.

$$\vec{n} (3; -2; 1) \text{ هو شعاع ناظمي للمستوي } (ABC) \text{ و } \vec{n}' (1; 1; -1) \text{ شعاع ناظمي للمستوي } (P).$$

$$\vec{n} \cdot \vec{n}' = 3(1) - 2(1) - 1 = 0 \text{ وهذا يعني } \vec{n} \text{ يعامد } \vec{n}' \text{ ومنه } (ABC) \text{ و } (P) \text{ متعامدان.}$$

ب - تبين أن تقاطع (ABC) و (P) هو المستقيم (Δ) ذو التمثيل الوسيط:

$$\begin{cases} x = -2 + t \\ y = -7 + 4t; t \in \mathbb{R} \\ z = -7 + 5t \end{cases}$$

بالتعويض في معادلة (ABC) و (P) نجد:

$$3(-2 + t) - 2(-7 + 4t) + (-7 + 5t) - 1 = 0 \text{ ومنه } (\Delta) \text{ محتو في المستوي } (ABC).$$

$$\text{و } (-2 + t) + (-7 + 4t) - (-7 + 5t) + 2 = 0 \text{ ومنه } (\Delta) \text{ محتو في المستوي } (P).$$

وعليه تقاطع (ABC) و (P) هو المستقيم (Δ) .ج - المسافة بين النقط D والمستوي (ABC) .

$$d_1 = \frac{|3(-3) - 2(4) + 4 - 1|}{\sqrt{14}} = \frac{14}{\sqrt{14}} = \sqrt{14}$$

المسافة بين النقطة D والمستوي (P).

$$d_2 = \frac{|-3+4-4+2|}{\sqrt{3}} = \frac{1}{\sqrt{3}}$$

استنتاج المسافة d₃ بين النقطة D والمستقيم (Δ).

المستويان (ABC) و (P) متعامدان ومنه حسب نظرية فيثاغورث $d_3^2 = d_1^2 + d_2^2$

$$d_3 = \sqrt{\frac{43}{3}} \text{ ومنه } d_3 = \sqrt{d_1^2 + d_2^2} \text{ وعليه } d_3 = \sqrt{\frac{43}{3}}$$

3. (Q) المستوي الذي يشمل النقطة D والعمودي على كل من المستويين (ABC) و (P).

أ - كتابة معادلة ديكرتية للمستوي (Q).

(ABC) و (P) يتقاطعان في المستقيم (Δ) وبما أن (Q) يعامد (ABC) و (P) فإنه يعامد المستقيم (Δ) أي أن $\vec{u}(1;4;5)$ شعاع توجيه (Δ) هو شعاع ناظمي للمستوي (Q). معادلة المستوي (Q) من الشكل $x + 4y + 5z + d = 0$ وبما أن D تنتمي للمستوي (Q) فإن $-3+4(4)+5(4)+d=0$ ومنه $d = -33$ وعليه $x + 4y + 5z - 33 = 0$: (Q).

ب - تبين أن المستويات الثلاثة (ABC)، (P) و (Q) تتقاطع في نقطة واحدة H.

بما أن $(ABC) \cap (P) = (\Delta)$ فإن $(ABC) \cap (P) \cap (Q) = (\Delta) \cap (Q)$.

بما أن (Δ) يعامد (Q) فإن (Δ) و (Q) يتقاطعان في نقطة H.

تعيين H نقطة تقاطع (Δ) و (Q).

$$\begin{cases} x = -2+t \dots\dots\dots(1) \\ y = -7+4t \dots\dots\dots(2) \\ z = -7+5t \dots\dots\dots(3) \\ x + 4y + 5z - 33 = 0 \dots\dots(4) \end{cases} \text{ إحداثيات H هي حل للجملية}$$

$$\text{ومنه } -2+t+4(-7+4t)+5(-7+5t)-33=0 \text{ وعليه } t = \frac{7}{3} \text{ إذن } H\left(\frac{1}{3}; \frac{7}{3}; \frac{14}{3}\right)$$

ج - حساب بطريقة ثانية، المسافة بين النقطة D والمستقيم (Δ).

المسقط العمودي لكل نقطة من (Q) على (Δ) هي النقطة H لأن (Δ) عمودي على (Q).

وبما أن D نقطة من (Q) فإن H هي المسقط العمودي للنقطة D على (Δ).

بالتالي $d(D;(\Delta)) = DH$

$$DH = \sqrt{\frac{100}{9} + \frac{25}{9} + \frac{4}{9}} = \sqrt{\frac{129}{9}} = \sqrt{\frac{43}{3}} \text{ ومنه } \overline{DH} \left(\frac{10}{3}; -\frac{5}{3}; \frac{2}{3} \right)$$

التمرين الثاني:

نعتبر في مجموعة الأعداد المركبة $z^3 - 3z^2 + 3z + 7 = 0$ المعادلة:

(1) إثبات أن العدد -1 حلا لهذه المعادلة.

$$(-1)^3 - 3(-1)^2 + 3(-1) + 7 = -1 - 3 - 1 + 7 = 0 \text{ ومنه العدد } -1 \text{ حل لهذه المعادلة.}$$

إيجاد الحلين الآخرين.

بما أن -1 حل للمعادلة فإن $(z^3 - 3z^2 + 3z + 7) = (z+1)(z^2 + az + b)$ حيث a و b عدنان حقيقيان.

$$b = 7 \text{ و } a + b = 3 \text{ و } a + 1 = -3 \text{ بالمطابقة نجد } (z+1)(z^2 + az + b) = z^3 + (a+1)z^2 + (a+b)z + b$$

$$أي $a = -4$ و $b = 7$ ومنه $(z+1)(z^2 - 4z + 7) = z^3 - 3z^2 + 3z + 7$.$$

$$z^3 - 3z^2 + 3z + 7 = 0 \text{ معناه } (z+1)(z^2 - 4z + 7) = 0 \text{ أي } z = -1 \text{ أو } (1) z^2 - 4z + 7 = 0 \dots \text{ نحل المعادلة (1).}$$

$$\Delta = 16 - 28 = -12 = (2\sqrt{3}i)^2 \text{ للمعادلة حلان هما } z = 2 + \sqrt{3}i \text{ و } z = 2 - \sqrt{3}i.$$

(2) المستوي المركب منسوب إلى المعلم المتعامد والمتجانس $(O; \vec{u}, \vec{v})$ لتكن النقط: A, B, C, G لواحقتها

$$\text{على الترتيب: } z_1, z_2, z_3, z_4 \text{ حيث } z_1 = -1, z_2 = 2 + \sqrt{3}i, z_3 = 2 - \sqrt{3}i, z_4 = 3.$$

- كتابة العدد $\frac{z_1 - z_3}{z_4 - z_3}$ على الشكل الأسّي.

$$\frac{z_1 - z_3}{z_4 - z_3} = \frac{-1 - 2 + \sqrt{3}i}{3 - 2 + \sqrt{3}i} = \frac{-3 + \sqrt{3}i}{1 + \sqrt{3}i} = \frac{(-3 + \sqrt{3}i)(1 - \sqrt{3}i)}{(1 + \sqrt{3}i)(1 - \sqrt{3}i)} = \frac{4\sqrt{3}i}{4} = \sqrt{3}i$$

$$\text{ومنه } \frac{z_1 - z_3}{z_4 - z_3} = \sqrt{3}e^{i\frac{\pi}{2}}.$$

استنتاج طبيعة المثلث ACG .

$$\text{لدينا } \arg\left(\frac{z_1 - z_3}{z_4 - z_3}\right) = \frac{\pi}{2} \text{ ومنه } (\overline{CG}; \overline{CA}) = \frac{\pi}{2} \text{ بالتالي المثلث } ACG \text{ قائم في } C.$$

(3) نسمي (γ) مجموعة النقط M من المستوي التي تحقق: (1) $(-\overline{MA} + 2\overline{MB} + 2\overline{MC}) \cdot \overline{CG} = 12 \dots \dots \dots$

أ - إثبات أن G هي مرجح الجملة: $\{(A; -1); (B; 2), (C; 2)\}$.

$$\{(A; -1); (B; 2), (C; 2)\} \text{ هي مرجح الجملة: ومنه } \frac{-z_1 + 2z_2 + 2z_3}{3} = \frac{1 + 4 + 2\sqrt{3}i + 4 - 2\sqrt{3}i}{3} = 3 = z_4$$

ب - إثبات أن المساواة (1) يمكن كتابتها على الشكل (2) $\overline{GM} \cdot \overline{CG} = -4 \dots \dots \dots$.

G مرجح الجملة: $\{(A; -1); (B; 2), (C; 2)\}$ إذن من أجل نقطة M من المستوي يكون لدينا

$$-\overline{MA} + 2\overline{MB} + 2\overline{MC} = 3\overline{MG} \text{ أي } -\overline{MA} + 2\overline{MB} + 2\overline{MC} = (-1 + 2 + 2)\overline{MG}$$

$$\text{المساواة (1) تكافئ } 3\overline{MG} \cdot \overline{CG} = 12 \text{ ومنه } \overline{MG} \cdot \overline{CG} = 4 \text{ أي } \overline{GM} \cdot \overline{CG} = -4.$$

ج - التأكد أن النقطة A تنتمي إلى المجموعة (γ) .

$$A \text{ تنتمي إلى المجموعة } (\gamma) \text{ إذا كان } \overline{GACG} = -4.$$

$$\text{لدينا } \overline{CG}(1; \sqrt{3}), \overline{GA}(-4; 0), G(3; 0), C(2; -\sqrt{3}), A(-1; 0)$$

$$\overline{GACG} = -4(1) + 0(\sqrt{3}) = -4 \text{ وهذا يعني أن } A \text{ تنتمي إلى المجموعة } (\gamma).$$

د - تبين أنه يمكن كتابة المساواة (2) على الشكل $\overrightarrow{AM} \cdot \overrightarrow{CG} = 0$.

$$\overrightarrow{GA} \cdot \overrightarrow{CG} + \overrightarrow{AM} \cdot \overrightarrow{CG} = -4 \text{ ومعناه } (\overrightarrow{GA} + \overrightarrow{AM}) \cdot \overrightarrow{CG} = -4$$

ولدينا $\overrightarrow{GA} \cdot \overrightarrow{CG} = -4$ ومنه $\overrightarrow{AM} \cdot \overrightarrow{CG} = -4 + 4 = 0$ أي $\overrightarrow{AM} \cdot \overrightarrow{CG} = 0$.
استنتاج طبيعة (γ) .

$$\overrightarrow{AM} \cdot \overrightarrow{CG} = 0 \text{ وتكافئ } \overrightarrow{GM} \cdot \overrightarrow{CG} = -4 \text{ تكافئ } (-\overrightarrow{MA} + 2\overrightarrow{MB} + 2\overrightarrow{MC}) \cdot \overrightarrow{CG} = 12$$

بالتالي (γ) هي المستقيم المار من A و $\overrightarrow{CG}$ شعاع ناظمي له.

التمرين الثالث:

1. أ - حساب $\lim_{x \rightarrow -\infty} g(x)$ و $\lim_{x \rightarrow +\infty} g(x)$.

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} (x^2 - 1) = +\infty \text{ و } \lim_{x \rightarrow -\infty} e^{-x} = +\infty \text{ لأن } \lim_{x \rightarrow -\infty} g(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} 1 + (x^2 - 1)e^{-x} = +\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} 1 + (x^2 - 1)e^{-x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} 1 + x^2 e^{-x} - e^{-x}$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) = 1 \text{ إذن } \lim_{x \rightarrow +\infty} e^{-x} = 0 \text{ و (التزايد المقارن) } \lim_{x \rightarrow +\infty} x^2 e^{-x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^2}{e^x} = 0$$

ب - دراسة اتجاه تغير الدالة g .

الدالة g تقبل الاشتقاق على $\mathbb{R}$ ولدينا $g'(x) = 2xe^{-x} - e^{-x}(x^2 - 1)$

$$= e^{-x} [2x - (x^2 - 1)]$$

$$= e^{-x} (-x^2 + 2x + 1)$$

من أجل كل عدد حقيقي x ، $e^{-x} > 0$ ومنه إشارة $g'(x)$ هي نفس إشارة $(-x^2 + 2x + 1)$.

x	$-\infty$	$1 - \sqrt{2}$	$1 + \sqrt{2}$	$+\infty$
$-x^2 + 2x + 1$	—	0	+	—

الدالة g متناقصة تماماً على المجالين $]-\infty; 1 - \sqrt{2}]$ و $[1 + \sqrt{2}; +\infty[$ ومتزايدة تماماً على المجال $[1 - \sqrt{2}; 1 + \sqrt{2}]$

جدول تغيرات الدالة g .

x	$-\infty$	α	$1 - \sqrt{2}$	0	$1 + \sqrt{2}$	$+\infty$
$g'(x)$		—	0	+	0	—
$g(x)$	$+\infty$		$g(1 - \sqrt{2})$		$g(1 + \sqrt{2})$	1

2. أ - تبين أن المعادلة $g(x)=0$ تقبل حلين في $\mathbb{R}$.

الدالة g مستمرة ومتناقصة تماما على المجال $]-\infty; 1-\sqrt{2}]$ و تأخذ قيمها في المجال $[g(1-\sqrt{2}); +\infty[$ ولدينا $-0,25 \leq g(1-\sqrt{2}) \leq 0$ إذن $0 \in [g(1-\sqrt{2}); +\infty[$ ومنه المعادلة $g(x)=0$ تقبل حلا وحيدا α في المجال $]-\infty; 1-\sqrt{2}]$

ولدينا الدالة g مستمرة ومنتزعة تماما على المجال $[1-\sqrt{2}; 1+\sqrt{2}]$ وتأخذ قيمها في المجال $[g(1-\sqrt{2}); g(1+\sqrt{2})]$ و $0 \in [g(1-\sqrt{2}); g(1+\sqrt{2})]$ ومنه المعادلة $g(x)=0$ تقبل حلا وحيدا β في المجال $[1-\sqrt{2}; 1+\sqrt{2}]$ ولدينا كذلك الدالة g مستمرة ومتناقصة تماما على المجال $[1+\sqrt{2}; +\infty[$ وتأخذ قيمها في المجال $[g(1+\sqrt{2}); 1]$ و $0 \notin [g(1+\sqrt{2}); 1]$ إذن على المجال $[1+\sqrt{2}; +\infty[$ ، $g(x) \neq 0$

خلاصة: المعادلة $g(x)=0$ تقبل حلين في $\mathbb{R}$.

التحقق أن أحدهما معدوم والآخر α حيث: $-0,8 < \alpha < -0,7$

بما أن $g(0)=1+(0-1)e^0=0$ فإن $\beta=0$ ولدينا $g(-0,7) \leq -0,02$ و $g(-0,8) \leq 0,19$ أي $g(-0,7) \times g(-0,8) < 0$ ومنه $-0,8 < \alpha < -0,7$

ب - استنتاج إشارة $g(x)$ ؛ حسب قيم العدد الحقيقي x .

x	$-\infty$	α	0	$+\infty$
$g(x)$	+	0	—	+

II - الدالة f معرفة على $\mathbb{R}$ بـ: $f(x)=x-(x+1)^2 e^{-x}$.1. أ - حساب $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$ و $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x)$.

لدينا $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} x - (x+1)^2 e^{-x} = -\infty$ و $\lim_{x \rightarrow -\infty} x = -\infty$ إذن $\lim_{x \rightarrow -\infty} x - (x+1)^2 e^{-x} = -\infty$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} x - (x+1)^2 e^{-x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} x - (x^2 e^{-x} + 2x e^{-x} + e^{-x}) = +\infty$$

$$\text{لأن } \lim_{x \rightarrow +\infty} x = +\infty \text{ و } \lim_{x \rightarrow +\infty} x^2 e^{-x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} 2x e^{-x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} e^{-x} = 0$$

ب - تبين أن المستقيم (Δ) ذا المعادلة $y=x$ ، مقارب مائل للمنحنى (C_f) عند $+\infty$.

$$f(x) - x = x - (x+1)^2 e^{-x} - x = -(x+1)^2 e^{-x} = -(x^2 e^{-x} + 2x e^{-x} + e^{-x})$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) - x = \lim_{x \rightarrow +\infty} -(x^2 e^{-x} + 2x e^{-x} + e^{-x}) = \lim_{x \rightarrow +\infty} -\left(\frac{x^2}{e^x} + 2\frac{x}{e^x} + e^{-x}\right) = 0$$

ومنه المستقيم (Δ) ذا المعادلة $y=x$ ، مقارب مائل للمنحنى (C_f) عند $+\infty$.

ج - دراسة وضعية المنحنى (C_f) بالنسبة إلى المستقيم (Δ) .

ليكن x عددا حقيقيا؛ $f(x) - x = -(x+1)^2 e^{-x}$

لدينا $e^{-x} > 0$ و $(x+1)^2 \geq 0$ إذن $f(x) - x \leq 0$

ومنه المنحنى (C_f) يوجد تحت المستقيم (Δ) .

2. أ - تبين أنه، من أجل كل عدد حقيقي x ، $f'(x) = g(x)$.

$$f'(x) = 1 - [2(x+1)e^{-x} - e^{-x}(x+1)^2] = 1 - [e^{-x}(1-x^2)] = 1 + e^{-x}(x^2 - 1) = g(x)$$

ب - جدول تغيرات الدالة f .

x	$-\infty$	α	0	$+\infty$
$f'(x)$		+	0	-
$f(x)$	$-\infty$	$f(\alpha)$	-1	$+\infty$

3. أ - تبين أن المنحنى (C_f) يقبل مماسين، معامل توجيه كل منهما يساوي 1، يطلب تعيين معادلة لكل منهما.

$$f'(x_0) = 1 \text{ يكافئ } 1 + (x_0^2 - 1)e^{-x_0} = 1 \text{ ويكافئ } (x_0^2 - 1)e^{-x_0} = 0 \text{ لدينا } e^{-x_0} \neq 0 \text{ ومنه } x_0^2 - 1 = 0 \text{ أي}$$

$$x_0 = 1 \text{ أو } x_0 = -1 \text{ إذن } (C_f) \text{ يقبل مماسين معامل توجيه كل منهما يساوي 1 عند النقطتين } M(1; f(1)) \text{ و}$$

$$M'(-1; f(-1)).$$

كتابة معادلة المماسين

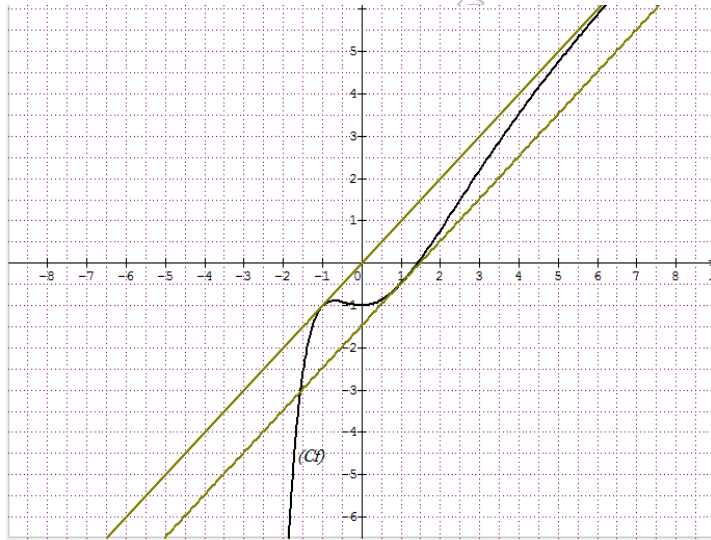
$$\text{المماس عند النقطة } M(1; f(1)) \text{ معادلته } y = f'(1)(x-1) + f(1) \text{ ومنه } y = x - 1 + (1 - 4e^{-1})$$

$$y = x - 4e^{-1}$$

$$\text{المماس عند النقطة } M'(-1; f(-1)) \text{ معادلته } y = f'(-1)(x+1) + f(-1) \text{ ومنه } y = x + 1 - 1 \text{ أي } y = x$$

ب - تمثيل (Δ) والمماسين والمنحنى (C_f)

ج - المناقشة بيانياً، حسب قيم الوسيط الحقيقي m ، عدد حلول المعادلة ذات المجهول x : $(x+1)^2 + me^x = 0$.



$$(x+1)^2 + me^x = 0 \text{ تكافئ}$$

$$me^x = -(x+1)^2$$

$$\text{وتكافئ } m = -(x+1)^2 e^{-x} \text{ و تكافئ}$$

$$x + m = x - (x+1)^2 e^{-x} \text{ أي}$$

$$f(x) = x + m$$

$$\text{إذا كان } m \in]-\infty; -4e^{-1}] \text{ فإن المعادلة تقبل}$$

حلا وحيدا

$$\text{إذا كان } m = -4e^{-1} \text{ فإن المعادلة تقبل حلين}$$

أحدهما مضاعف

$$\text{إذا كان } m \in]-4e^{-1}; 0[\text{ فإن المعادلة تقبل}$$

ثلاثة حلول

$$\text{إذا كان } m = 0 \text{ فإن المعادلة تقبل حلا واحدا مضاعفا}$$

$$\text{إذا كان } m \in]0; +\infty[\text{ فإن المعادلة لا تقبل حلا}$$

التمرين الرابع:

(I) الدالة العددية g معرفة على $]0; +\infty[$ بـ: $g(x) = 1 - x^2 - \ln x$.

1. دراسة اتجاه تغير الدالة g .

الدالة g تقبل الاشتقاق على $]0; +\infty[$ ولدينا: $g'(x) = -2x - \frac{1}{x}$

من أجل كل x من المجال $]0; +\infty[$ ، $g'(x) < 0$ وبالتالي الدالة g متناقصة تماما على $]0; +\infty[$.

2. حساب $g(1)$ واستنتاج تبعا لقيم x إشارة $g(x)$.

$$g(1) = 1 - 1^2 - \ln 1 = 0$$

x	0	1	$+\infty$
$g(x)$	+	0	-

(II) الدالة العددية f معرفة على $]0; +\infty[$ بـ: $f(x) = x - 1 - \frac{\ln x}{x}$

1. أ - حساب $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} x - 1 - \frac{\ln x}{x} = +\infty \text{ لأن } \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln x}{x} = 0 \text{ و } \lim_{x \rightarrow +\infty} x - 1 = +\infty.$$

ب - حساب $\lim_{x \rightarrow 0} f(x)$

$$\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = +\infty \text{ ومنه } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln x}{x} = -\infty \text{ لدينا}$$

تفسير النتيجة هندسيا.

(C_f) يقبل مستقيم مقارب معادلته $x = 0$ (محور الترتيب).

2. أ - تبين أنه من أجل كل x من $]0; +\infty[$ فإن $f'(x) = \frac{-g(x)}{x^2}$

$$f'(x) = 1 - \left[\frac{\frac{1}{x}(x) - \ln x}{x^2} \right] = \frac{x^2 - 1 + \ln x}{x^2} = \frac{-g(x)}{x^2}$$

استنتاج اتجاه تغير الدالة f .

إشارة $f'(x)$ هي عكس إشارة $g(x)$

من أجل $x \in]0; 1[$ ، $g(x) > 0$ ومنه $f'(x) < 0$.

ومن أجل $x \in]1; +\infty[$ ، $g(x) < 0$ ومنه $f'(x) > 0$.

إذن الدالة f متناقصة تماما على $]0; 1[$ و متزايدة تماما على $]1; +\infty[$.

ب - جدول تغيرات الدالة f .

x	0	1	$+\infty$
$f'(x)$	-	0	+
$f(x)$	$+\infty$	0	$+\infty$

3. أ - تبين أن المستقيم (D) الذي معادلته $y = x - 1$ مقارب مائل للمنحنى (C_f) .

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) - (x - 1) = \lim_{x \rightarrow +\infty} -\frac{\ln x}{x} = 0$$

ب - دراسة وضعية (C_f) بالنسبة إلى (D).

$$\text{لدينا } f(x) - (x - 1) = \frac{-\ln x}{x} \text{ ومنه إشارة } f(x) - (x - 1) \text{ هي عكس إشارة } \ln x.$$

x	0	1	$+\infty$
$f(x) - y$		+	0 -
الوضعية النسبية		(D) فوق (C_f)	(D) تحت (C_f)
		(C _f) يقطع (Δ)	في النقطة A(1;0)

4. تبين أن المستقيم (Δ) ذا المعادلة $y = x - 1 - \frac{1}{e}$ يمسّ المنحنى (C_f) في نقطة A يطلب تعيين إحداثياتها.

$$f'(x_0) = 1 \text{ تعني } \frac{-g(x)}{x^2} = 1 \text{ وبكافئ } x^2 - 1 + \ln x = x^2 \text{ وبكافئ } \ln x = 1 \text{ أي } x = e$$

$$\text{ولدينا } f(e) = e - 1 - \frac{1}{e} \text{ و } y = e - 1 - \frac{1}{e} \text{ إذن المستقيم (Δ) يمسّ المنحنى } (C_f) \text{ في النقطة } A\left(e; e - 1 - \frac{1}{e}\right)$$

5. رسم (Δ)، (D)، و (C_f) .

