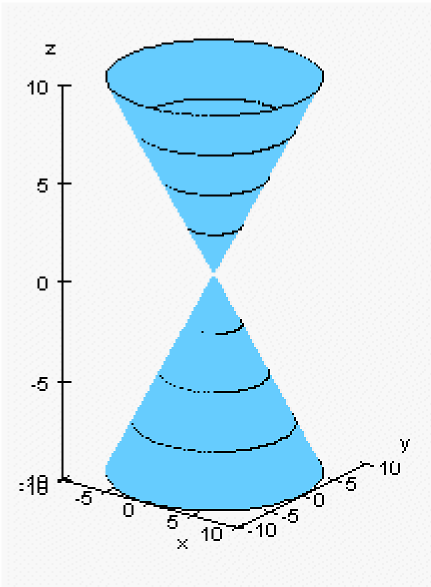
المقاطع المستوية
(هذا الموضوع خاص بشعبة الرياضيات فقط)

تمارين

التمرين 01

نعتبر في الفضاء المنسوب إلى معلم متعامد و متجانس $\left(O;\vec{i},\vec{j};\vec{k}\right)$، السطح المخروطي (C) الذي معادلته
$x^2+y^2=z^2$ (انظر الشكل التالي).



1) بيّن أن المستقيم (Δ): $\begin{cases} x=t \\ y=t\sqrt{3} \\ z=2t \end{cases}$ $(t\in\mathbb{R})$ ، مولد للسطح المخروطي (C).

2) نعتبر النقطة $\Omega(0;3;0)$ و المستوي (Q) الذي معادلته $y=3$. نسمي (H) تقاطع (C) و المستوي (Q) .

(1-2) عيّن في المعلم $\left(\Omega;\vec{i},\vec{k}\right)$ للمستوي (Q) معادلة (H).

(2-2) بيّن أنه توجد دالة f بحيث تكون (H) هي إتحاد المنحنى الذي معادلته $z=f(x)$ و المنحنى الذي معادلته $z=-f(x)$.
أنشئ (H) في المستوي (Q) .

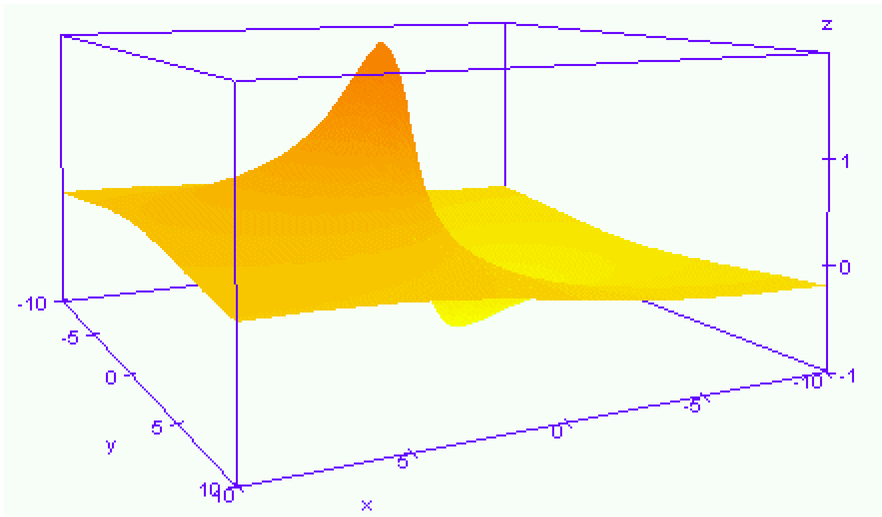
(3-2) $\vec{u}$ و $\vec{v}$ شعاعان حيث $\vec{u}=\vec{i}-\vec{k}$ و $\vec{v}=\vec{i}+\vec{k}$.
$M(x;z)$ هي نقطة في المعلم $\left(\Omega;\vec{i},\vec{k}\right)$. بيّن أن $\overrightarrow{\Omega M}=\dfrac{x-z}{2}\vec{u}+\dfrac{x+z}{2}\vec{v}$

(4-2) $(X;Z)$ هما إحداثيا M في المعلم $\left(\Omega;\vec{u},\vec{v}\right)$. برهن أن $M\in(H)$ يكافئ $XZ=-\dfrac{9}{4}$.

التمرين 02

نعتبر في الفضاء المنسوب إلى معلم متعامد و متجانس $\left(O;\vec{i},\vec{j};\vec{k}\right)$ السطح (S) الذي معادلته $z=\dfrac{4x+2}{x^2+y^2+2}$

(انظر الشكل التالي).



1) عيّن تقاطع (S) مع المستويات التي معادلاتها $z=0$ ، $z=1$ ، $z=2$ و $z=4$.

2)يمكن وضع المخمنة : من أجل كل x و y من $\mathbb{R}$ ، العدد $\dfrac{4x+2}{x^2+y^2+2}$ محصور بين عددين حقيقيين ثابتين m و M . برهن صحة هذه المخمنة.

عيّن m و M.

التمرين 03

نعتبر في الفضاء المنسوب إلى معلم متعامد و متجانس $\left(O;\vec{i},\vec{j};\vec{k}\right)$، النقطتين $A(1;3;2)$ و $B(4;6;-4)$

و السطح المخروطي (Γ) الذي محوره $(O;\vec{k})$ و رأسه O ويشمل النقطة A.

1) برهن أن $x^2+y^2=\frac{5}{2}z^2$ معادلة للسطح المخروطي (Γ) .

2) (P) هو المستوي الذي يشمل النقطة B و يوازي المستوي (xOy) .

(1-2) عيّن معادلة للمستوي (P).

(2-2) نسمي (C_1) تقاطع (P) و (Γ). عيّن طبيعة (C_1).

التمرين 04

الفضاء منسوب إلى معلم متعامد و متجانس $\left(O;\vec{i},\vec{j};\vec{k}\right)$. نسمي (S) مجموعة النقط $M(x\,;y\,;z)$ من الفضاء حيث $z=3xy$ و نقول أن (S) هو سطح معادلته $z=3xy$.

نسمي " الخط المستوي الذي حرفه z_0 " تقاطع (S) و المستوي الذي معادلته $z=z_0$

و " الخط المستوي الذي فاصلته x_0 " تقاطع (S) و المستوي الذي معادلته $x=x_0$

و " الخط المستوي الذي ترتيبه y_0 " تقاطع (S) و المستوي الذي معادلته $y=y_0$.

1) نعتبر الخطوط التي فواصلها 1 ، $\frac{3}{2}$ و 2 ، على الترتيب.

ارسم المسقط العمودي على المستوي (yOz) لكل خط من هذه الخطوط المستوية.

2) (2-1) ما هي طبيعة خط مستو فاصلته ثابتة؟

(2-2) بيّن أن كل قطع مستو حرفه ثابت غي معدوم هو قطع زائد .

3) تمثل المنحنيات (C_1) ، (C_2) و (C_3) من الشكل (2)، المساقط العمودية على المستوي (xOy) لثلاثة خطوط مستوية أحرفها k_1 ، k_2 و k_3 على الترتيب.

عيّن k_1 ، k_2 و k_3.

4) النقطة A' الممثلة على (C_2) في الشكل (2)، هي المسقط العمودي على المستوي (xOy) لنقطة $A(x\,;y\,;z)$ من (S).

(4-1) عيّن إحداثيات A في المعلم $\left(O;\vec{i},\vec{j};\vec{k}\right)$.

(4-2) عيّن إحداثيات A'' التي هي المسقط العمودي للنقطة A على المستوي (yOz) .

5) (P) هو المستوي الذي معادلته $3x+6y-z-6=0$.

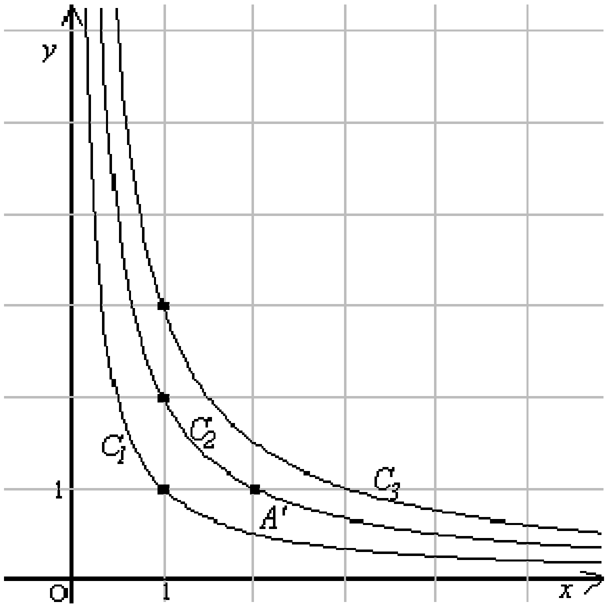
(5-1) بيّن أن $A\in(P)$.

(5-2) بيّن أن (P) يشمل الخط المستوي الذي فاصلته 2 .

(3-5) بيّن أن تقاطع (S) و (P) هو إتحاد الخط المستوي الذي فاصلته 2 و مستقيم آخر يطلب تعيينه بجملة معادلتين ديكارتيتين .

(يمكن استعمال التحليل $x + 2y - xy - 2 = (x-2)(1-y)$) .

الشكل (2)



التمرين 05

الفضاء منسوب إلى معلم متعامد و متجانس $(O;\vec{i},\vec{j};\vec{k})$.

نعتبر النقطتين **A(0 ; 5 ; 5)** و **B(0 ;0 ;10)** .

1)نسمي (P_0) المستوي الذي معادلته $x = 0$ و (C) الدّائرة التي مركزها B و التي تشمل النقطة A .

برهن أن المستقيم (OA) يمس (C).

2) (S) هي الكرة التي تولّدها الدّائرة (C) خلال دورانها حول المحور (Oz).

(S) هو السطح المخروطي الذي يولّده المستقيم (OA) خلال دورانه حول المحور (Oz).

(1-2) برهن أن $x^2 + y^2 = z^2$ معادلة ديكارتية للسطح المخروطي (Γ) .

(2-2) عيّن تقاطع (Γ) و (S).

3) M هي نقطة من (Γ) ، احداثياتها $(x;y;z)$ أعداد صحيحة نسبية.

برهن أنه لا يمكن أن يكون العددان x و y فرديين معا.

حلول

التمرين 01

1) $M(x;y;z)\in(\Delta)$ يعني $x=t$ و $y=t\sqrt{3}$ و $z=t$ مع $t\in\mathbb{R}$

و $\begin{cases} x^2+y^2=t^2+\left(t\sqrt{3}\right)^2 \\ z^2=(2t)^2 \end{cases}$ أي $\begin{cases} x^2+y^2=4t^2 \\ z^2=4t^2 \end{cases}$، نستنتج أن M تنتمي إلى السطح المخروطي (C)

منه (Δ) مولد للسطح المخروطي (C).

(2

(1-2)

(H) هي تقاطع (C) و المستوي (Q) .

نقطة $M(x;y;z)$ تنتمي إلى (H) إذا و فقط إذا كان $\begin{cases} x^2+y^2=z^2 \\ y=3 \end{cases}$ أي

$\begin{cases} x^2+9=z^2 \\ y=3 \end{cases}$.

لدينا $\overrightarrow{\Omega M}=x\ \vec{i}+(y-3)\ \vec{j}+z\ \vec{k}$ و بماأن $M\in(Q)$ فإن $z=3$ و منه $\overrightarrow{\Omega M}=x\ \vec{i}+z\ \vec{k}$

إذن إحداثيا M في المعلم $\left(\Omega;\vec{i},\vec{k}\right)$ هما $(x;z)$.

معادلة (H) في المعلم $\left(\Omega;\vec{i},\vec{k}\right)$ من (Q) هي $x^2+9=z^2$.

(2-2)

- معادلة (H) في المعلم $\left(\Omega;\vec{i},\vec{k}\right)$ من (Q) هي $x^2+9=z^2$.

  $x^2+9=z^2$ تكافئ $z=\sqrt{x^2+9}$ أو $z=-\sqrt{x^2+9}$

  (H) هي إتحاد المنحني الذي معادلته $z=\sqrt{x^2+9}$ و المنحني الذي معادلته $z=-\sqrt{x^2+9}$

  و f هي الدّالة المعرفة على $\mathbb{R}$ بـ: $f(x)=\sqrt{x^2+9}$.

- لدينا $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(x^2+9\right)=+\infty$ و $\lim\limits_{x\to-\infty}\left(x^2+9\right)=+\infty$

  إذن $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=+\infty$ و $\lim\limits_{x\to-\infty}f(x)=+\infty$

  f تقبل الاشتقاق على $\mathbb{R}$ و $f'(x)=\dfrac{2x}{2\sqrt{x^2+9}}$.

  إشارة $f'(x)$ هي إشارة x .

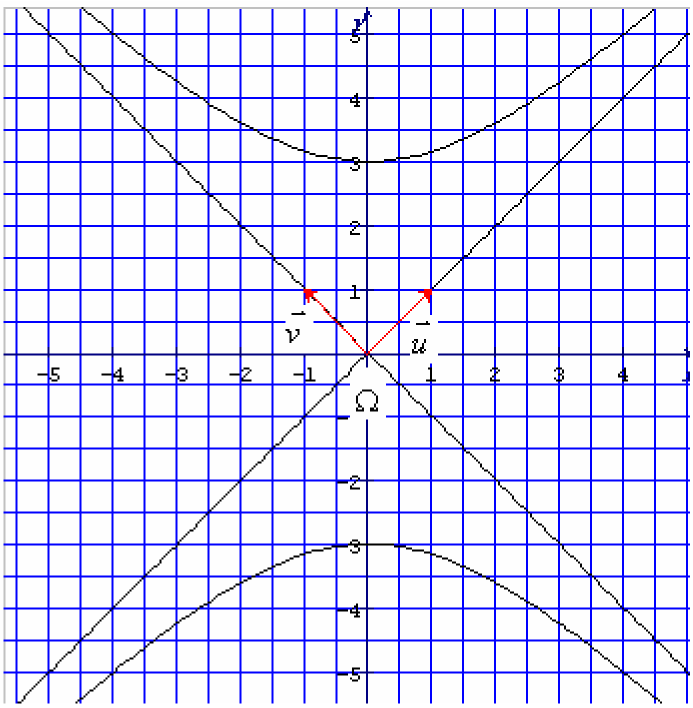
  نستنتج جدول التغيرات:

x	$-\infty$		0		$+\infty$
f'		$-$	0	$+$	
f	$+\infty$	↘	3	↗	$+\infty$

$$\begin{cases} \lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{f(x)}{x} = \lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{x\sqrt{1+\dfrac{9}{x^2}}}{x} = 1 \\ \lim\limits_{x \to +\infty} \left[f(x) - x\right] = \lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{9}{\sqrt{x^2+9}+x} = 0 \end{cases}$$

إذن المنحني الذي يمثل الدالة f يقبل، لما x يؤو ل إلى $+\infty$ ، مستقيما مقاربا مائلا معادلته $y = x$.

المنحني الذي يمثل الدالة $x \xrightarrow{f} \sqrt{x^2+9}$ و المنحني الذي يمثل الدالة $x \xrightarrow{-f} -\sqrt{x^2+9}$ متناظران بالنسبة إلى محور الفواصل.



(3-2) $M(x;z)$ هي نقطة في المعلم $\left(\Omega;\vec{i},\vec{k}\right)$ إذن $\overrightarrow{\Omega M}=x\,\vec{i}+z\,\vec{k}$

و بماأن $\vec{u}=\vec{i}-\vec{k}$ و $\vec{v}=\vec{i}+\vec{k}$ فإن $\vec{u}+\vec{v}=2\vec{i}$ و $\vec{v}-\vec{u}=2\vec{k}$

إذن $\overrightarrow{\Omega M}=x\,\vec{i}+z\,\vec{k}=x\dfrac{\vec{u}+\vec{v}}{2}+z\dfrac{\vec{v}-\vec{u}}{2}=\dfrac{x-z}{2}\vec{u}+\dfrac{x+z}{2}\vec{v}$

(4-2) $(X;Z)$ هما إحداثيا M في المعلم $\left(\Omega;\vec{u},\vec{v}\right)$ إذن $\overrightarrow{\Omega M}=X\,\vec{u}+Z\,\vec{v}$

نستنتج من السؤال السابق أن $\begin{cases}X=\dfrac{x-z}{2}\\ Z=\dfrac{x+z}{2}\end{cases}$

معادلة (H) في المعلم $\left(\Omega;\vec{i},\vec{k}\right)$ من (Q) هي $x^2+9=z^2$ أي $(x+z)(x-z)=-9$

أي $\dfrac{(x+z)}{2}\times\dfrac{(x-z)}{2}=-\dfrac{9}{4}$

إذن معادلة (H) في المعلم $\left(\Omega;\vec{u},\vec{v}\right)$ من (Q) هي $X\,Z=-\dfrac{9}{4}$.

التمرين 02

(1

- تقاطع (S) مع المستوي التي معادلاتها $z=0$ هو المنحني (Γ_1) الذي معادلته

$\begin{cases}\dfrac{4x+2}{x^2+y^2+2}=0\\ z=0\end{cases}$ أي $\begin{cases}x=-\dfrac{1}{2}\\ z=0\end{cases}$.

(Γ_1) هي المستقيم ذو المعادلة $x=-\dfrac{1}{2}$ في المستوي الذي معادلته $z=0$.

- تقاطع (S) مع المستوي التي معادلاتها $z=1$ هو المنحني (Γ_2) الذي معادلته

$\begin{cases}\dfrac{4x+2}{x^2+y^2+2}=1\\ z=1\end{cases}$ أي $\begin{cases}(x-2)^2+y^2=4\\ z=1\end{cases}$.

(Γ_2) هي الدائرة ذات المعادلة $(x-2)^2+y^2=4$ في المستوي الذي معادلته $z=1$.

- تقاطع (S) مع المستوي التي معادلاتها $z=2$ هو المنحني (Γ_3) الذي معادلته

$\begin{cases}\dfrac{4x+2}{x^2+y^2+2}=2\\ z=2\end{cases}$ أي $\begin{cases}(x-1)^2+y^2=0\\ z=2\end{cases}$ أي $\begin{cases}(x;y)=(1;0)\\ z=2\end{cases}$.

(Γ_3) هي النقطة $B(1;0;2)$ المحتواة في المستوي الذي معادلته $z=2$.

• تقاطع (S) مع المستوي التي معادلاتها $z=4$ هو المنحني (Γ_4) الذي معادلته

$$\begin{cases}\dfrac{4x+2}{x^2+y^2+2}=4\\ z=4\end{cases}$$ أي $$\begin{cases}\left(x-\dfrac{1}{2}\right)^2+y^2=-\dfrac{5}{4}\\ z=4\end{cases}$$.

(Γ_4) هي المجموعة الخالية.

2) مخمنة : $m \le \dfrac{4x+2}{x^2+y^2+2} \le M$ ، $M \cong 2$ و $m \cong -1$

(نستعمل البرمجية المناسبة، مثلا : المجدول إكسال)

نأخذ $k \neq 0$ (من أجل $k=0$: $x=-\dfrac{1}{2}$ ، انظر السؤال السابق)

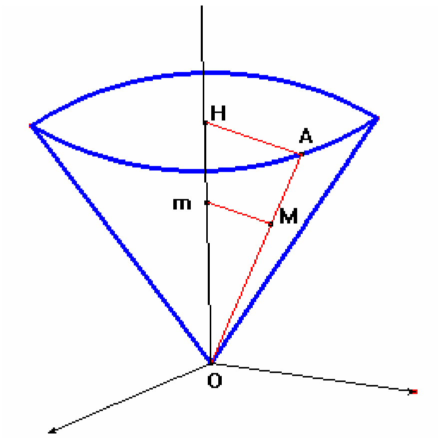
$\dfrac{4x+2}{x^2+y^2+2}=k$ تكافئ $\left(x-\dfrac{2}{k}\right)^2+y^2=\dfrac{-2k^2+2k+4}{k^2}$

و $-2k^2+2k+4 \ge 0$ يكافئ $-k^2+k+2 \ge 0$ و يكافئ $-1 \le k \le 2$

نستنتج أن $-1 \le \dfrac{4x+2}{x^2+y^2+2} \le 2$ ، منه $M=2$ و $m=-1$.

التمرين 03

$A(1;3;2)$ و $B(4;6;-4)$ نقطتان ، (Γ) هو المخروط الذي محوره $(O;\vec{k})$ و يشمل A.



1) $M(x;y;z)$ نقطة من (Γ) ، $m(0;0;z)$ هي مسقطها العمودي على المحور (Oz) .

$H(0;0;2)$ هي السقط العمودي للنقطة $A(1;3;2)$ على المحور (Oz) .

لدينا $\dfrac{OM}{OA}=\dfrac{Om}{OH}$ إذن $\dfrac{OM^2}{OA^2}=\dfrac{Om^2}{OH^2}$ و منه $\dfrac{x^2+y^2+z^2}{14}=\dfrac{z^2}{4}$ و نجد $x^2+y^2=\dfrac{5z^2}{2}$.

2) (2-1) $\vec{k}(0;0;1)$ هو شعاع ناظمي للمستوي (P) ، إذن $M(x;y;z)$ تنتمي إلى (P) إذا و فقط إذا كان $\overrightarrow{BM}\bullet\vec{k}=0$ أي $z+4=0$. $z=-4$ هي معادلة ديكارتية للمستوي (P) .

(2-2) $M(x;y;z)$ تنتمي إلى (P) و (Γ) إذا و فقط إذا كان $\begin{cases} x^2+y^2=\frac{5}{2}z^2 \\ z=-4 \end{cases}$

أي $\begin{cases} x^2+y^2=40 \\ z=-4 \end{cases}$ إذن (C_1) هي الدّائرة الحتواة في المستوي (P) التي معادلتها $x^2+y^2=40$.

التمرين 04

$z=3xy$ (1

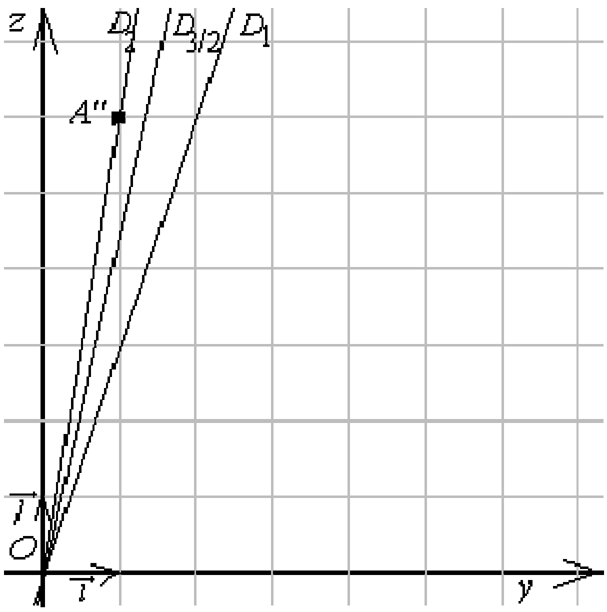
من أجل $x=1$ لدينا : $z=3y$

من أجل $x=x=\frac{3}{2}$ لدينا : $z=\frac{9}{2}y$

من أجل $x=1x=2$ لدينا : $z=6y$

من أجل $x=1$ لدينا : $z=3y$

نجد نفس المعادلات (معادلات مستقيمات) بالإسقاط على المستوي (yOz).



(2

(1-2) إذا كان $x = k$ (k ثابت) فإن $z = 3ky$ معادلة لمستقيم.

(2-2) إذا كان $x = k$ (k ثابت غير معدوم) فإن $3xy = k$ أي $y = \dfrac{k}{3x}$ معادلة لقطع زائد.

(3

المنحني (C_1) يمر بالنقطة $(1;1)$ إذن $k_1 = 3\times1\times1 = 3$

المنحني (C_2) يمر بالنقطة $(1;2)$ إذن $k_2 = 3\times1\times2 = 6$

المنحني (C_3) يمر بالنقطة $(1;3)$ إذن $k_3 = 3\times1\times3 = 9$

(4

(1-4) النقطة A' تنتمي إلى (C_2) مع $A'(2;1)$ إذن إحداثيات A في المعلم $(O;\vec{i},\vec{j};\vec{k})$ هي $A(2;1;6)$

(2-4) A'' تنتمي إلى المسقط العمودي للخط المستوي الذي فاصلته 2 في المستوي $(y\,O\,z)$

إذن A'' تنتمي إلى المستقيم D_2 ، إحداثياها في المستوي $(y\,O\,z)$ هي $(1;6)$.

(5

(1-5) $A(2;1;6)$ تنتمي إلى المستوي (P) إذا و فقط إذا كانت إحداثياتها تحقق معادلة $(P): 3x + 6y - z - 6 = 0$

$3\times2 + 6\times1 - 6 - 6 = 0$ إذن $A(2;1;6) \in (P)$.

(2-5) إحداثيات كل نقطة M من الخط المستوي الذي فاصلته 2 هي $(2;y;z)$ ، x و y عددان حقيقيان حيث

$z = 6y$ إذن $M(2;y;6y)$.

$3\times2 + 6\times y - 6y - 6 = 0$ ، إحداثيات M تحقق معادلة (P) إذن $M(2;y;6y) \in (P)$.

نستنتج أن (P) يشمل الخط المستوي الذي فاصلته 2 .

(3-5) $M(x;y;z) \in (P) \cap (S)$ يكافئ $3x + 6y - z - 6 = 0$ et $z = 3xy$

يكافئ $3x + 6y - 3xy - 6 = 0$ et $z = 3xy$

يكافئ $x + 2y - xy - 2 = 0$ et $z = 3xy$

يكافئ $x - xy + 2y - 2 = 0$ et $z = 3xy$

يكافئ $x(1 - y) + 2(y - 1) = 0$ et $z = 3xy$

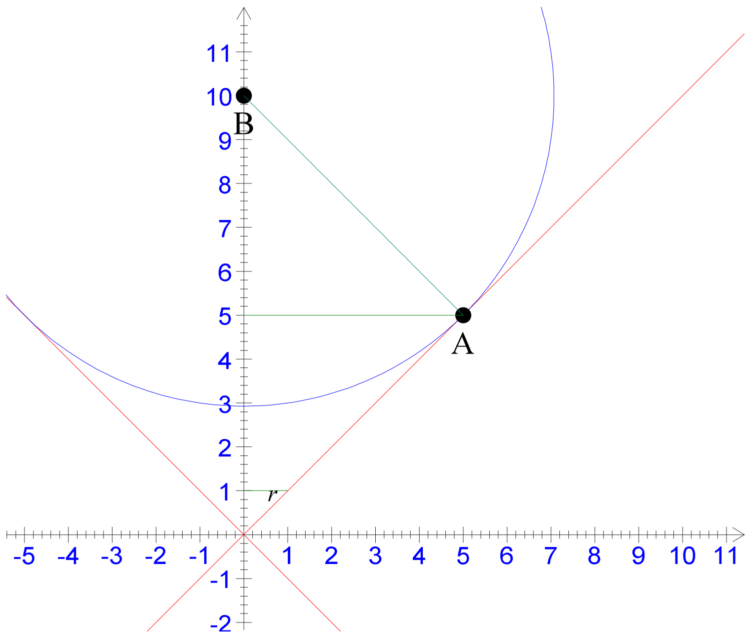
يكافئ $(1 - y)(x - 2) = 0$ et $z = 3xy$

يكافئ ($y = 1$ et $z = 3x$) ou ($x = 2$ et $z = 6y$)

يكافئ $M(2;y;6y)$ تنتمي إلى إتحاد مستقيمين :

الخط المستوي الذي فاصلته 2 و الخط المستوي الذي فاصلته 1.

التمرين 05



1) المستقيم (OA) يمس الدّائرة إذا و فقط إذا كان (OA) يعامد المستقيم (AB) أي بعبارة أخرى إذا و فقط إذا الشعاع $\vec{OA}$ يعامد الشعاع $\vec{AB}$.

لدينا $A\begin{pmatrix}0\\5\\5\end{pmatrix}$ و $B\begin{pmatrix}0\\0\\10\end{pmatrix}$ إذن $\vec{AB}\begin{pmatrix}0\\-5\\5\end{pmatrix}$ و $\vec{OA}\begin{pmatrix}0\\5\\5\end{pmatrix}$ و منه $\vec{AB}.\vec{OA}=-5\times5+5\times5=0$

نستنتج أن $\vec{OA}$ يعامد $\vec{AB}$ إذن المستقيم (OA) يمس الدّائرة (C) .

2) (1-2) $M(x;y;z)$ نقطة من (Γ) و $H(0,0;z)$ مسقطها العمودي على (Oz)،

لدينا $\tan^2\frac{\pi}{4}=\frac{HM^2}{OH^2}$ إذن $x^2+y^2=z^2$.

(2-2)معادلة الكرة التي مركزها B و نصف قطرها $AB=\sqrt{(-5)^2+5^2}=\sqrt{2\times5^2}=\sqrt{50}$

هي $x^2+y^2+(z-10)^2=50$.

نقطة $M(x;y;z)$ تنتمي إلى (S) و إلى (Γ) إذا وفقط إذا كان $(*)...\begin{cases}x^2+y^2+(z-10)^2=50\\x^2+y^2=z^2\end{cases}$

المعادلة $(*)$ تكافئ $\begin{cases}x^2+y^2=z^2\\z^2+(z-10)^2=50\end{cases}$

تكافئ $\begin{cases}x^2+y^2=z^2\\z^2+z^2-20z+100=50\end{cases}$

تكافئ $\begin{cases}x^2+y^2=z^2\\2z^2-20z+50=0\end{cases}$

تكافئ $\begin{cases}x^2+y^2=z^2\\z^2-10z+25=0\end{cases}$

تكافئ $\begin{cases}x^2+y^2=z^2\\(z-5)^2=0\end{cases}$

تكافئ $\begin{cases}z=5\\x^2+y^2=5^2\end{cases}$

تقاطع (S) و (Γ) هو الدّائرة التي مركزها $\Omega(0;0;5)$ و نصف قطرها 5 المحتواة في المستوي الذي معادلته $z=5$.

3) الإحداثيات $(x\,;y\,;z)$ للنقط M تحقق $x^2 + y^2 = z^2$ (x ، y و z أعداد صحيحة نسبية) .

نستعمل الاستدلال بالخلف :

نفرض أن x فردي و y فردي ...... (I)

نضع $x = 2k + 1$ و $y = 2k' + 1$

المعادلة $x^2 + y^2 = z^2$ تصبح $(2k + 1)^2 + (2k' + 1)^2 = z^2$

أي $4k^2 + 4k + 1 + 4k'^2 + 4k' + 1 = z^2$

أي $4(k^2 + k'^2 + k + k') + 2 = z^2$

نستنتج أن 2 يقسم z^2 . و إذا كان يقسم z^2 فإن 2 يقسم حتما z و 4 يقسم z^2 .

لا يمكن للعدد 4 أن يقسم z^2 لأن $\begin{cases} z^2 = 4\lambda + 2 \\ \lambda = k^2 + k'^2 + k + k' \end{cases}$ أي z^2 ليس من الشكل $z^2 = 4\lambda$

و ذلك يشكل تناقضا ، إذن ما فرضناه في(I) غير صحيح .