الأعداد المركبة

تمارين

التمرين 01

طويلة و عمدة عدد مركب - خواص .

نعتبر الأعداد المركبة $z_1 = 1 + i\sqrt{3}$ ، $z_2 = 1 + i$ و z_0 حيث $z_0 = \frac{z_1}{z_2}$.

1) احسب طويلة و عمدة لـه z_1 ثم نفس السؤال بالنسبة لـ: z_2.
2) احسب طويلة و عمدة لـ: z_0.
3) اكتب z_0 على الشكل الجبري .
4) استنتج $\sin\frac{\pi}{12}$ و $\cos\frac{\pi}{12}$.

التمرين02

الشكل الجبري و الشكل الأسي .

نعتبر في مجموعة الأعداد المركبة المعادلة $z^2 + 2|z|^2 - \frac{3}{4} = 0$.

1) حل هذه المعادلة (تعطى الحلول على الشكل الجبري) .
2) نسمي z_1 الحل الحقيقي السالب و z_2 **الحل حيث** $Arg(z_2) \equiv \frac{\pi}{2}[2\pi]$.

اكتب $z_1 + z_2$ على الشكل الأسي .

التمرين03

الشكل الأسي – الجذران التربيعيان لعدد مركب .

نعتبر العدد المركب $Z = \frac{\sqrt{3} + i}{\sqrt{2} + i\sqrt{2}}$.

1) اكتب Z على الشكل الأسي .
2)حل المعادلة $z^2 = \frac{\sqrt{3} + i}{\sqrt{2} + i\sqrt{2}}$

التمرين04

حل معادلة من الدرجة الثالثة .

نعتبر في مجموعة الأعداد المركبة المعادلة $z^3-2iz^2+2z-4i=0.........(*)$.

1) بيّن أن $2i$ حل للمعادلة $(*)$.

2) حلل $z^3-2iz^2+2z-4i$ ثم استنتج حلول المعادلة $(*)$.

التمرين05

حل معادلة من الدرجة الثالثة معاملاتها تشمل $\sin\alpha$ - الشكل الأسي .

α عدد حقيقي ينتمي إلى المجال $[0;\pi]$.

نعتبر المعادلة $z^3-(1-2\sin\alpha)z^2+(1-2\sin\alpha)z-1=0....(*)$ التي مجهولها z.

1) بيّن أن 1 حل للمعادلة $(*)$.

2) حلل $z^3-(1-2\sin\alpha)z^2+(1-2\sin\alpha)z-1$ ثم استنتج حلول المعادلة $(*)$.

3) اكتب الأعداد المركبة الآتية على الشكل الأسي.

$z_1=1$ ؛ $z_2=-\sin\alpha+i\cos\alpha$ ؛ $z_3=-\sin\alpha-i\cos\alpha$.

التمرين 06

أعداد مركبة عمداتها غير شهيرة .

نعتبر العدد المركب $z=\cos\frac{2\pi}{7}+i\sin\frac{2\pi}{7}$.

نضع $S=z+z^2+z^4$ و $T=z^3+z^5+z^6$.

1) بيّن أن من أجل كل عدد صحيح k ، $z^k=z^{k-7}$.

2) بيّن أن $T=\overline{S}$.

3) بيّن أن $\mathrm{Im}(S)>0$.

4) احسب $S+T$ و ST .

حل المعادلة $x^2-(S+T)x+ST=0$. استنتج S و T .

التمرين 07

حل معادلة من الدرجة الثالثة معاملاتها تشمل $\tan\alpha$ بتبديل المجهول - الشكل الأسي .

عدد حقيقي ينتمي إلى المجال $\left]-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right[$.

نعتبر المعادلة $(1+iz)^3(1-i\tan\alpha)=(1-iz)^3(1+i\tan\alpha)....(*)$ التي مجهولها z.

1) بيّن أن إذا كان z يحقق المعادلة $(*)$ فإن $|1+iz|=|1-iz|$ و استنتج أن $z\in\mathbb{R}$.

2) بيّن أن $\frac{1+i\tan\alpha}{1-i\tan\alpha}=e^{i2\alpha}$.

3) حل المعادلة $(*)$ بوضع $z=\tan\beta$ مع $\beta\in\left]-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right[$.

حلول

التمرين 01

1) **طويلة** z_1 **و عمدة للعدد المركب** z_1 **:**

• $|z_1| = \sqrt{1^2 + \left(\sqrt{3}\right)^2} = 2$

منه $z_1 = 2\left(\frac{1}{2} + i\,\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$ إذن $\begin{cases} \frac{1}{2} = \cos\frac{\pi}{3} \\ \frac{\sqrt{3}}{2} = \sin\frac{\pi}{3} \end{cases}$ و منه $\begin{cases} |z_1| = 2 \\ Arg\left(z_1\right) \equiv \frac{\pi}{3}[2\pi] \end{cases}$

طويلة z_1 **و عمدة للعدد المركب** z_2 **:**

• $|z_2| = \sqrt{1^2 + 1^2} = \sqrt{2}$

منه $z_2 = \sqrt{2}\left(\frac{1}{\sqrt{2}} + i\,\frac{1}{\sqrt{2}}\right) = \sqrt{2}\left(\frac{\sqrt{2}}{2} + i\,\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$ إذن $\begin{cases} \frac{\sqrt{2}}{2} = \cos\frac{\pi}{4} \\ \frac{\sqrt{2}}{2} = \sin\frac{\pi}{4} \end{cases}$ و منه

$$\begin{cases} |z_2| = \sqrt{2} \\ Arg\left(z_2\right) \equiv \frac{\pi}{4}[2\pi] \end{cases}$$

2) **طويلة** z_1 **و عمدة للعدد المركب** z_0 **:**

$z_0 = \frac{z_1}{z_2}$ إذن $|z_0| = \left|\frac{z_1}{z_2}\right| = \frac{|z_1|}{|z_2|} = \frac{2}{\sqrt{2}} = \sqrt{2}$ و $Arg\left(\frac{z_1}{z_2}\right) \equiv Arg\left(z_1\right) - Arg\left(z_2\right) \equiv \frac{\pi}{3} - \frac{\pi}{4} \equiv \frac{\pi}{12}[2\pi]$

إذن $\begin{cases} |z_0| = \sqrt{2} \\ Arg\left(z_0\right) \equiv \frac{\pi}{12}[2\pi] \end{cases}$

3) **كتابة** z_0 على الشكل الجبري

$$z_0 = \frac{1 + i\sqrt{3}}{1+i} = \frac{\left(1 + i\sqrt{3}\right)\left(1 - i\right)}{\left(1+i\right)\left(1-i\right)} = \frac{\sqrt{3}+1}{2} + i\,\frac{\sqrt{3}-1}{2}$$

4) **استنتاج** $\sin\frac{\pi}{12}$ و $\cos\frac{\pi}{12}$

الشكل المثلثي لـ: z_0 هو $z_0 = \sqrt{2}\left(\cos\frac{\pi}{12} + i\sin\frac{\pi}{12}\right)$

الشكل الجبري لـ: z_0 هو $z_0 = \frac{\sqrt{3}+1}{2} + i\,\frac{\sqrt{3}-1}{2}$

نستنتج $\begin{cases} \sqrt{2}\cos\dfrac{\pi}{12} = \dfrac{\sqrt{3}+1}{2} \\ \sqrt{2}\sin\dfrac{\pi}{12} = \dfrac{\sqrt{3}-1}{2} \end{cases}$ أي $\begin{cases} \cos\dfrac{\pi}{12} = \dfrac{\sqrt{3}+1}{2\sqrt{2}} = \dfrac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4} \\ \sin\dfrac{\pi}{12} = \dfrac{\sqrt{3}-1}{2\sqrt{2}} = \dfrac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4} \end{cases}$

التمرين02

1) $z = x + iy$ ، x و y عددان حقيقيان .

لدينا $z^2 = (x+iy)^2 = x^2 - y^2 + 2ixy$ و $|z|^2 = \left(\sqrt{x^2+y^2}\right)^2 = x^2 + y^2$

$z^2 + 2|z|^2 - \dfrac{3}{4} = 0$ يكافئ $x^2 - y^2 + 2ixy + 2(x^2+y^2) - \dfrac{3}{4} = 0$

$z^2 + 2|z|^2 - \dfrac{3}{4} = 0$ يكافئ $\left(x^2 - y^2 + 2x^2 + 2y^2 - \dfrac{3}{4}\right) + 2ixy = 0$

$z^2 + 2|z|^2 - \dfrac{3}{4} = 0$ يكافئ $\left(3x^2 + y^2 - \dfrac{3}{4}\right) + 2ixy = 0$

من أجل $x = 0$ **:** $y^2 - \dfrac{3}{4} = 0$ **إذن** $y = -\dfrac{\sqrt{3}}{2}$ **أو** $y = \dfrac{\sqrt{3}}{2}$ **أي** $\begin{cases} x = 0 \\ y = -\dfrac{\sqrt{3}}{2} \end{cases}$ **و** $\begin{cases} x = 0 \\ y = \dfrac{\sqrt{3}}{2} \end{cases}$

من أجل $y = 0$: $12x^2 - 3 = 0$ إذن $x = -\dfrac{1}{2}$ **أو** $x = \dfrac{1}{2}$ **أي** $\begin{cases} x = -\dfrac{1}{2} \\ y = 0 \end{cases}$ و $\begin{cases} x = \dfrac{1}{2} \\ y = 0 \end{cases}$

تقبل المعادلة $z^2 + 2|z|^2 - \dfrac{3}{4} = 0$ أربعة حلول هي $-i\dfrac{\sqrt{3}}{2}$, $i\dfrac{\sqrt{3}}{2}$, $-\dfrac{1}{2}$ et $\dfrac{1}{2}$.

(2

- $Arg\left(-i\dfrac{\sqrt{3}}{2}\right) \equiv -\dfrac{\pi}{2}[2\pi]$ لأن $-i\dfrac{\sqrt{3}}{2}$ تخيلي صرفا و جزءه التخيلي سالب

$Arg\left(i\dfrac{\sqrt{3}}{2}\right) \equiv \dfrac{\pi}{2}[2\pi]$ لأن $i\dfrac{\sqrt{3}}{2}$ تخيلي صرفا و جزءه التخيلي موجب

و بماأن $-\dfrac{1}{2} \in \mathbb{R}^-$ و $-\dfrac{1}{2} \in \mathbb{R}^+$ فإن $z_1 = -\dfrac{1}{2}$ و $z_2 = i\dfrac{\sqrt{3}}{2}$.

- كتابة $z_1 + z_2$ على الشكل الأسي :

$z_1 + z_2 = -\dfrac{1}{2} + i\dfrac{\sqrt{3}}{2}$

$|z_1 + z_2| = \sqrt{\left(-\dfrac{1}{2}\right)^2 + \left(\dfrac{\sqrt{3}}{2}\right)^2} = 1$ و $Arg(z_1 + z_2) \equiv \dfrac{2\pi}{3}[2\pi]$ إذن $z_1 + z_2 = e^{i\frac{2\pi}{3}}$.

التمرين03

1) $\left|\sqrt{3}+i\right|=\sqrt{\left(\sqrt{3}\right)^2+1^2}=2$ إذن $\sqrt{3}+i=2\left(\frac{\sqrt{3}}{2}+i\,\frac{1}{2}\right)=2\left(\cos\frac{\pi}{6}+i\,\sin\frac{\pi}{2}\right)=2e^{i\frac{\pi}{6}}$

$\left|\sqrt{2}+i\sqrt{2}\right|=\sqrt{\left(\sqrt{2}\right)^2+\left(\sqrt{2}\right)^2}=2$ إذن $\sqrt{2}+i\sqrt{2}=2\left(\frac{\sqrt{2}}{2}+i\,\frac{\sqrt{2}}{2}\right)=2\left(\cos\frac{\pi}{4}+i\,\sin\frac{\pi}{4}\right)=2e^{i\frac{\pi}{4}}$

منه $Z=\dfrac{2e^{i\frac{\pi}{6}}}{2e^{i\frac{\pi}{4}}}=e^{i\frac{\pi}{6}-i\frac{\pi}{4}}=e^{-i\frac{\pi}{12}}$.

2) نضع $z=re^{i\alpha}$.

المعادلة $z^2=\dfrac{\sqrt{3}+i}{\sqrt{2}+i\sqrt{2}}$ تكافئ $r^2e^{i2\alpha}=e^{-i\frac{\pi}{12}}$ أي $r^2e^{i2\alpha}=e^{-i\frac{\pi}{12}}$

نستنتج $\begin{cases} r^2=1 \\ 2\alpha=-\frac{\pi}{12}+2k\pi \end{cases}$ و $k\in\mathbb{Z}$ إذن $\begin{cases} r=1 \\ \alpha=-\frac{\pi}{24}+k\pi \end{cases}$

من أجل $k=0$: $\alpha=-\frac{\pi}{24}$ منه $z=1\times e^{-i\frac{\pi}{24}}$

من أجل $k=1$: $\alpha=-\frac{\pi}{24}+\pi=\frac{23\pi}{24}$ منه $z=1\times e^{i\frac{23\pi}{24}}$

تقبل المعادلة $z^2=\dfrac{\sqrt{3}+i}{\sqrt{2}+i\sqrt{2}}$ حلين هما $e^{-i\frac{\pi}{24}}$ و $e^{i\frac{23\pi}{24}}$.

التمرين04

1) $(2i)^3-2i(2i)^2+2(2i)-4i=-8i+8i+4i-4i=0$

$2i$ تحقق المعادلة $(*)$ إذن $2i$ حل للمعادلة $(*)$.

2) $2i$ حل للمعادلة $(*)$ إذن:

$(*)$ تكافئ $z^3-2iz^2+2z-4i=(2i)^3-2i(2i)^2+2(2i)-4i$

تكافئ $z^3-(2i)^3-2iz^2+2i(2i)^2+2z-2(2i)=0$

تكافئ $\left[z^3-(2i)^3\right]-2i\left[z^2-(2i)^2\right]+2\left[z-2i\right]=0$.

تذكر أن : $A^3-B^3=(A-B)\left(A^2+B^2+AB\right)$

إذن:

$(*)$ تكافئ $(z-2i)\left[z^2+(2i)^2+2iz\right]-2i(z-2i)(z+2i)+2[z-2i]=0$

تكافئ $(z-2i)\left[z^2-4-4iz\right]-2i(z-2i)(z+2i)+4[z-2i]=0$

تكافئ $(z-2i)\left[z^2+2\right]=0$

تكافئ $z=2i$ أو $z^2=-2$

تكافئ $z=2i$ أو $z^2=\left(i\sqrt{2}\right)^2$

تكافئ $z=2i$ أو $z=-i\sqrt{2}$ أو $z=i\sqrt{2}$

تقبل المعادلة $(*)$ ثلاثة حلول هي $2i$ ، $-i\sqrt{2}$ و $i\sqrt{2}$.

التمرين05

1) $1^3-(1-2\sin\alpha)\times 1^2+(1-2\sin\alpha)\times 1-1=1-1+2\sin\alpha+1-2\sin\alpha-1=0$

1 يحقق المعادلة $(*)$ إذن 1 حل لـ: $(*)$.

2)

- 1 حل لـ: $(*)$، إذن من أجل كل عدد مركب z لدينا :

$$z^3-(1-2\sin\alpha)z^2+(1-2\sin\alpha)z-1=(z-1)\left(az^2+bz+c\right)$$
$$=az^3+(b-a)z^2+(c-b)z-c$$

نستنتج أن $\begin{cases} a=1 \\ b-a=-1+2\sin\alpha \\ c-b=1-2\sin\alpha \\ c=1 \end{cases}$ أي $\begin{cases} a=1 \\ b=2\sin\alpha \\ c=1 \end{cases}$

و منه $z^3-(1-2\sin\alpha)z^2+(1-2\sin\alpha)z-1=(z-1)\left(z^2+2\sin\alpha\, z+1\right)$.

- المعادلة $(*)$ تكافئ $(z-1)\left(z^2+2\sin\alpha\, z+1\right)=0$

تكافئ $z=1$ أو $z^2+2\sin\alpha\, z+1=0$

نحل المعادلة $z^2+2\sin\alpha\, z+1=0$: مميزها هو $\Delta=(2\sin\alpha)^2-4$

أي $\Delta=4\left(\sin^2\alpha-1\right)=-4\cos^2\alpha=(2\cos\alpha)^2$

تقبل هذه المعادلة حلين هما

$$z'=\frac{-2\sin\alpha+2i\cos\alpha}{2}=-\sin\alpha+i\cos\alpha$$

و $$z''=\frac{-2\sin\alpha-2i\cos\alpha}{2}=-\sin\alpha-i\cos\alpha$$

تقبل المعادلة $(*)$ ثلاثة حلول : 1 ؛ $-\sin\alpha+i\cos\alpha$ ؛ $-\sin\alpha-i\cos\alpha$.

3) كتابة z_1، z_2 و z_3 على الشكل الأسي

- $z_1=1=e^{io}$
- $z_2=-\sin\alpha+i\ \cos\alpha=i\left(\cos\alpha+i\ \sin\alpha\right)=i\,e^{i\alpha}=e^{i\frac{\pi}{2}}e^{i\alpha}=e^{i\left(\alpha+\frac{\pi}{2}\right)}$
- $z_3=-\sin\alpha-i\ \cos\alpha=\overline{z_2}=e^{-i\left(\alpha+\frac{\pi}{2}\right)}$

التمرين 06

(1

$$z^k=\cos\left(\frac{2k\pi}{7}\right)+i\ \sin\left(\frac{2k\pi}{7}\right)=\cos\left(\frac{2k\pi}{7}-2\pi\right)+i\ \sin\left(\frac{2k\pi}{7}-2\pi\right)$$

$$z^k=\cos\left(\frac{2(k-7)\pi}{7}\right)+i\ \sin\left(\frac{2(k-7)\pi}{7}\right)=z^{k-7}$$

(2 $\overline{T}=\overline{z^3+z^5+z^6}=\overline{z^3}+\overline{z^5}+\overline{z^6}$

بماأن $z^k=z^{k-7}$ فإن $\overline{z^k}=z^{7-k}$ إذن $\overline{T}=\overline{z^3}+\overline{z^5}+\overline{z^6}=z^4+z^2+z=S$ **.**

(3

$$\text{Im}(S)=\sin\frac{2\pi}{7}+\sin\frac{4\pi}{7}-\sin\frac{\pi}{7}$$

- $\sin\frac{2\pi}{7}>0$ **لأن** $\sin\frac{2\pi}{7}\in\left[0;\frac{\pi}{2}\right]$
- $\sin\frac{4\pi}{7}>\sin\frac{\pi}{7}$ لأن الدّالة $\sin$ متزايدة على $\left[0;\frac{\pi}{2}\right]$

إذن: $\text{Im}(S)>0$.

(4

- $S+T=z+z^2+z^4+z^3+z^5+z^6$

$$S+T=z+z^2+z^3+z^4+z^5+z^6=z\,\frac{1-z^6}{1-z}$$

و بماأن $z^7=1$ أي $z^6\times z=1$ فإن $z^6=\frac{1}{z}$ إذن $.S+T=z\,\frac{1-\frac{1}{z}}{1-z}=z\,\frac{\frac{z-1}{z}}{1-z}=-1$

- $ST=\left(z+z^2+z^4\right)\left(z^3+z^5+z^6\right)$

$$ST=z^4+z^6+z^7+z^5+z^7+z^8+z^7+z^9+z^{10}$$

و بماأن $z^7=1$ فإن $\begin{cases}z^8=z^7\times z=z\\ z^9=z^7\times z^2=z^2\\ z^{10}=z^7\times z^3=z^3\end{cases}$

إذن $ST=z^4+z^6+1+z^5+1+z+1+z^2+z^3$

أي $ST=3+z+z^2+z^3+z^4+z^5+z^6$ و منه $ST=3+S=3-1=2$

(5

● **حل المعادلة** $x^2-(S+T)x+ST=0$

المميز هو : $\Delta=(S+T)^2-4ST=S^2+T^2+2ST-4ST$

$$\Delta=S^2+T^2-2ST=(S-T)^2$$

الحلان هما : $x_1=S$ و $x_2=T$.

● **حساب** S **و** T

المعادلة $x^2-(S+T)x+ST=0$ تكافئ $x^2+x+2=0$.

نحل المعادلة $x^2+x+2=0$: مميزها هو $\Delta=-7$ أي $\Delta=\left(i\sqrt{7}\right)^2$

الحلان هما $x'=\dfrac{-1-i\sqrt{7}}{2}$ و $x''=\dfrac{-1+i\sqrt{7}}{2}$.

لدينا إذن $\{S;T\}=\left\{\dfrac{-1-i\sqrt{7}}{2};\dfrac{-1+i\sqrt{7}}{2}\right\}$ ، نستنتج من السؤال الثالث أن $\begin{cases}S=\dfrac{-1+i\sqrt{7}}{2}\\ T=\dfrac{-1-i\sqrt{7}}{2}\end{cases}$

التمرين07

(1

● لدينا $(1+iz)^3(1-i\tan\alpha)=(1-iz)^3(1+i\tan\alpha)$

إذن $\left|(1+iz)^3\right|\times|1-i\tan\alpha|=\left|(1-iz)^3\right|\times|1+i\tan\alpha|$

و بماأن $\begin{cases}|1-i\tan\alpha|=|1+i\tan\alpha|\\ \left|(1+iz)^3\right|=|1+iz|^3\\ \left|(1-iz)^3\right|=|1-iz|^3\end{cases}$ فإن $|1+iz|^3=|1-iz|^3$ أي $|1+iz|=|1-iz|$.

● نضع z = x+i y ، العلاقة $|1+iz|=|1-iz|$ تصبح $|1+i(x+iy)|=|1-i(x+iy)|$ أي

$|(1-y)+ix|=|(1+y)-ix|$ أي $(1-y)^2+x^2=(1+y)^2+x^2$ إذن $y=0$

و منه $z=x$ أي $z\in\mathbb{R}$.

(2 $$\frac{1+i\tan\alpha}{1-i\tan\alpha}=\frac{1+i\dfrac{\sin\alpha}{\cos\alpha}}{1-i\dfrac{\sin\alpha}{\cos\alpha}}=\frac{\cos\alpha+i\sin\alpha}{\cos\alpha-i\sin\alpha}=\frac{\cos\alpha+i\sin\alpha}{\cos(-\alpha)+i\cos(-\alpha)}=\frac{e^{i\alpha}}{e^{-i\alpha}}=e^{i2\alpha}$$

3)المعادلة $(*)$ تكافئ $\left(\dfrac{1+iz}{1-iz}\right)^3=\dfrac{1+i\tan\alpha}{1-i\tan\alpha}$

و بماأن $\begin{cases} \dfrac{1+i\ \tan\alpha}{1-i\ \tan\alpha} = e^{i\,2\alpha} \\ \dfrac{1+iz}{1-iz} = \dfrac{1+i\ \tan\beta}{1-i\ \tan\beta} = e^{i\,2\beta} \end{cases}$ فإن $(*)$ تكتب $\left(e^{i\,2\beta}\right)^3 = e^{i\,2\alpha}$ أي $e^{i\,6\beta} = e^{i\,2\alpha}$

و نستنتج أن $\begin{cases} 6\beta = 2\alpha + 2k\,\pi \\ k \in \mathbb{Z} \end{cases}$ أي $\begin{cases} \beta = \dfrac{\alpha}{3} + \dfrac{k\,\pi}{3} \\ k \in \mathbb{Z} \end{cases}$

من أجل $k = 0$: $\beta = \dfrac{\alpha}{3}$

من أجل $k = 1$: $\beta = \dfrac{\alpha}{3} + \dfrac{\pi}{3} = \dfrac{\alpha+\pi}{3}$

من أجل $k = 2$: $\beta = \dfrac{\alpha}{3} + \dfrac{2\pi}{3} = \dfrac{\alpha+2\pi}{3}$

حلول المعادلة $(*)$ هي : $z_1 = \tan\left(\dfrac{\alpha}{3}\right)$ ، $z_2 = \tan\left(\dfrac{\alpha+\pi}{3}\right)$ ، $z_3 = \tan\left(\dfrac{\alpha+2\pi}{3}\right)$.