الأعداد المركبة و الهندسة

تمارين

التمرين 01

معادلة من الدرجة الثالثة - المرجح - حساب أطوال - مجوعة نقطية .

نعتبر في مجموعة الأعداد المركبة المعادلتين الآتيتين :

$z^3-(4+i)z^2+(7+i)z-4=0.......(I)$ و $z^2-(3+i)z+4=0.......(II)$.

1) حل المعادلة (II) .

2) بيّن أن 1 حلا للمعادلة (I) و أنه يمكن كتابة (I) على الشكل $(z-2)\left(az^2+bz+c\right)=0$ ، a و b و c أعداد حقيقية يطلب تعيينها.

3) حل المعادلة (I). نسمي z_1 ، z_2 و z_3 حلول هذه المعادلة علما $|z_1|<|z_2|<|z_3|$.

4) النقط A ، B و C هي على الترتيب صوّر z_1 ، z_2 و z_3 .

(1-4) عيّن المرجح G للجملة $\{(A;1),(B;-2),(C;-1)\}$.

(2-4) احسب GA، GB و GC.

(3-4) عيّن المجموعة (Γ) للنقط M من المستوي حيث $MA^2-2MB^2-MC^2=-\dfrac{17}{2}$.

التمرين 02

الشكل الجبري - مجموعة نقطية - التفسير الهندسي للطويلة و العمدة .

المستوي منسوب إلى معلم متعامد و متجانس $\left(O;\vec{i},\vec{j}\right)$. نسمي M صورة العدد المركب z .

نضع $z'=\dfrac{z-3}{z-2i}$ من أجل كل z حيث $z\neq 2i$.

1)اكتب العدد المركب z' على شكله الجبري .

2) عيّن المجموعة (D) للنقط M بحيث يكون z' حقيقيا .

3) عيّن المجموعة (Γ) للنقط M بحيث يكون z' تخيليا صرفا .أنشئ (D) و (Γ).

4) نسمي A صورة 3 و B صورة $2i$. فسر هندسيا $|z'|$ و $Arg(z')$ و استنتج نتيجة السؤال الثاني و نتيجة السؤال الثالث.

التمرين 03

المتتاليات الهندسية و الأعداد المركبة - الشكل الأسي .

نعتبر المتتاليتين العدديتين (U_n) و (V_n) حيث $U_n = \left(\frac{1}{2}\right)^n$ و $V_n = n\frac{\pi}{3}$.

نسمي M_n النقطة التي لاحقتها z_n حيث $z_n = U_n e^{iV_n}$.

1) عيّن الأعداد الطبيعية n التي من أجلها $z_n \in \mathbb{R}$.

2) المستوي المركب منسوب إلى معلم متعامد و متجانس $\left(O;\vec{i},\vec{j}\right)$ (الوحدة : **4cm**).

عيّن لواحق النقط M_0, M_1, M_2, M_3 و M_4.

3) احسب أطوال أضلاع المثلث OM_nM_{n+1} بدلالة U_n . ما هي طبيعة هذا المثلث.

4)نعتبر المتتالية (α_n) المعرفة بـ: $\alpha_n = \left|z_{n+1} - z_n\right|$. بيّن أن (α_n) متتالية هندسية، عيّن حدها الأول و أساسها. احسب $\lim\limits_{n\to+\infty}(a_n)$

التمرين 04

معادلة من الدرجة الثالثة – الشكل الأسي - متوازي أضلاع – الدوران – التفسير الهندسي

لـ : $\left|\frac{z-a}{z-b}\right|$ و $Arg\left(\frac{z-a}{z-b}\right)$.

الجزء الأول

نعتبر في مجموعة الأعداد المركبة المعادلة : $z^3 + 2z^2 - 16 = 0 ......(I)$.

1) بيّن أن 2 حلا للمعادلة (I) و أنه يمكن كتابة (I) على الشكل $(z-2)\left(az^2 + bz + c\right) = 0$، a و b و c أعداد حقيقية يطلب تعيينها.

2)استنتج حلول المعادلة (I) على الشكل الجبري ثم على الشكل الأسي .

الجزء الثاني

المستوي المركب مزود بالمعلم المتعامد و المتجانس$\left(O;\vec{i},\vec{j}\right)$.

1)علّم النقط A، B وD ذات اللواحق، على الترتيب، $z_A = -2-2i$ و $z_B = 2$ و $z_D = -2+2i$.

2)احسب اللاحقة z_M للنقطة M حيث $ABMD$ متوازي أضلاع. علّم النقطة M.

3) E هي صورة M بالدوران الذي مركزه B و زاويته $-\frac{\pi}{2}$ ؛ F هي صورة M بالدوران الذي مركزه D و زاويته $\frac{\pi}{2}$.

(1-3) احسب اللاحقة z_E للنقطة E و اللاحقة z_F للنقطة F .

(2-3) علّم E و F.

4)اكتب $\frac{z_F - z_A}{z_E - z_A}$ على الشكل المثلثي و استنتج طبيعة المثلث AEF .

5) I هي منتصف $[EF]$. عيّن صورة المثلث EBA بالدوران الذي مركزه I و زاويته $-\frac{\pi}{2}$.

التمرين 05

الانسحاب - التحاكي - الدوران - طبيعة رباعي .

المستوي المركب مزود بالمعلم المتعامد و المتجانس $(O;\vec{i},\vec{j})$.

نعتبر النقط A ، B، C، P التي لواحقها

$z_A=\frac{3}{2}+6i$ ، $z_B=\frac{3}{2}-6i$ ، $z_C=-3-\frac{1}{4}i$ ، $z_P=3+2i$ على الترتيب و الشعاع $\vec{u}$ الذي لاحقته $z_{\vec{u}}=-1+\frac{5}{2}i$.

1) عيّن اللاحقة z_Q للنقطة Q صورة B بالانسحاب الذي شعاعه $\vec{u}$.

2) عيّن اللاحقة z_R للنقطة R صورة P بالتحاكي الذي مركزه C و نسبته $-\frac{1}{3}$.

3) عيّن اللاحقة z_S للنقطة S صورة P بالدوران الذي مركزه A و نسبته $-\frac{\pi}{2}$.

4) أنشئ النقط P، Q، R وS .

5) برهن أن $PQRS$ متوازي أضلاع .

6) احسب $\frac{z_R-z_Q}{z_P-z_Q}$. استنتج طبيعة متوازي الأضلاع $PQRS$. .

7) بيّن أن النقط P، Q، R وS تقع على نفس دائرة (Γ)، يطلب تعيين مركزها Ω و نصف قطرها r

8) بيّن أن المستقيم (AP) يمس الدائرة (Γ) .

التمرين 06

الشكل الأسي و الشكل الجبري - طبيعة رباعي - التشابه المباشر - الاستقامية .

المستوي المركب مزود بالمعلم المتعامد و المتجانس $(O;\vec{i},\vec{j})$.

نعتبر النقط A,B,C,D التي لواحقها $a=1$ ، $b=e^{i\frac{\pi}{3}}$ ، $c=\frac{3}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}i$ و $d=\frac{\sqrt{3}}{2}e^{-i\frac{\pi}{6}}$.

1) اكتب c على الشكل الأسي و d على الشكل الجبري.

2) بيّن أن الرباعي $OACB$ معين .

3) بيّن أن النقط D,A,C على استقامة واحدة.

4) عيّن الزاوية α و النسبة k للتشابه المباشر s الذي يحوّل A إلى C.

نسمي F صورة D و G صورة C بالتشابه s. بيّن أن النقط F ، C و G على استقامة واحدة .

التمرين 07

التشابه المستوي المباشر .

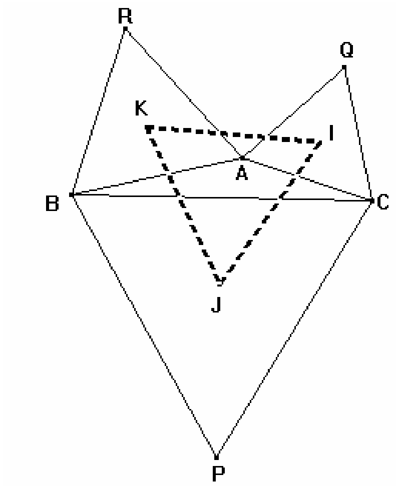
المستوي المركب مزود بالمعلم المتعامد و المتجانس $(O;\vec{i},\vec{j})$.

بيّن انه يوجد تشابه مباشر s وحيد يحوّل النقطة A التي لاحقتها $z_A = 1+i$ إلى النقطة B التي لاحقتها $z_B = 4i$ و يحوّل النقطة B إلى النقطة C التي لاحقتها $z_C = -4+6i$.

عيّن العناصر المميّزة لهذا التشابه المباشر s.

التمرين 08

توظيف تحويل نقطي لإثبات نتيجة .



نرسم خارج المثلث الكيفي ABC المثلثات المتقايسة الأضلاع ACQ ، BPC، RBA

التي مراكزها الثقل هي، على الترتيب، I، J، K.

برهن ان للمثلثات ABC، PQR، IJK نفس مركز الثقل .

التمرين 09

الشكل التحليلي لتشابه مباشر.

المستوي المركب مزود بالمعلم المتعامد و المتجانس $(O;\vec{i},\vec{j})$.

نسمي s التحويل النقطي الذي يرفق بكل نقطة $M(x;y)$ النقطة $M'(x';y')$ حيث

$$\begin{cases} x' = -x - y + 2 \\ y' = x - y - 1 \end{cases}$$

1) عيّن اللاحقة z' للنقطة M' بدلالة اللاحقة **z** للنقطة M .

2) بيّن أن s هو تشابه مباشر. عيّن العناصر المميّزة للتشابه s .

3) g هو التحويل النقطي الذي يرفق بكل نقطة M من المستوي المرجح G للجملة $\{(M;1),(M';1),(M'';1)\}$ حيث $M'=s(M)$ و $M''=s(M')$.

(3-1) احسب بدلالة **z** اللاحقة z'' للنقطة M'' و اللاحقة z_G للنقطة G.

(3-2) بيّن أن g هو تشابه مباشر. عيّن مركز التشابه g .

(3-3) عيّن لاحقة النقطة M_0 حيث $g(M_0)=O$.

أنشئ النقط M_0 ، $M_0'=s(M_0)$، $M_0''=s(M_0')$ و المركز Ω للتشابه s .

.

حلول

التمرين 01

1) حل المعادلة (II)

- حساب المميز :

$\Delta = -8+6i$

- نعيين الجذرين التربيعيين لـ: Δ :

$\alpha+i\beta$ جذر تربيعي لـ: Δ يكافئ $(\alpha+i\beta) = -8+6i....(*)$

$(*)$ تكافئ $\begin{cases}\alpha^2-\beta^2 = -8 \\ 2\alpha\beta = 6\end{cases}$

لاحظ أن $|\alpha+i\beta| = |-8+6i|$ (حسب $(*)$)، إذن $\alpha^2+\beta^2 = 10$

$(*)$ تكافئ عندئذ $\begin{cases}\alpha^2-\beta^2 = -8 \\ \alpha^2+\beta^2 = 10 \\ 2\alpha\beta = 6\end{cases}$ أي $\begin{cases}\left(\alpha^2+\beta^2\right)+\left(\alpha^2-\beta^2\right) = 2 \\ \left(\alpha^2+\beta^2\right)-\left(\alpha^2-\beta^2\right) = 18 \\ \alpha\beta = 3\end{cases}$

إذن $\begin{cases}2\alpha^2 = 2 \\ 2\beta^2 = 18 \\ \alpha\beta = 3\end{cases}$ أي $\begin{cases}\alpha^2 = 1 \\ \beta^2 = 9 \\ \alpha\beta = 3\end{cases}$

$\alpha^2 = 1$ يكافئ $\alpha = -1$ أو $\alpha = 1$ و $\beta^2 = 9$ يكافئ $\beta = -3$ أو $\beta = 3$

و بماأن $\alpha\beta = 3$ فإن $\begin{cases}\alpha = -1 \\ \beta = -3\end{cases}$ أو $\begin{cases}\alpha = 1 \\ \beta = 3\end{cases}$.

الجذران التربيعيان لـ: Δ هما $-1-3i$ و $1+3i$ ز

- مميز (II) هو: $\Delta = (1+3i)^2$. نحل المعادلة(II) و نجد الجذرين: $2+2i$ و $1-i$.

2) $1^3-(4+i)\times 1^2+(7+i)\times 1-4 = 0$ إذن إذن 1 حل للمعادلة(I).

بماأن 1حل لـ: $P(z) = z^3-(4+i)z^2+(7+i)z-4 = 0$ فإنه يمكن تحليل $P(z)$:

$P(z) = (z-1)\left(az^2+bz+c\right)$

و $z^3-(4+i)z^2+(7+i)z-4 = (z-2)\left(az^2+bz+c\right)$ يكتب أيضا :

$z^3-(4+i)z^2+(7+i)z-4 = az^3+(b-a)z^2+(c-b)z-c......(*)$.

تكون المساواة $(*)$ محققة من أجل كل عدد مركب z إذا و فقط إذا كان :

أي $\begin{cases} a=1 \\ b-a=-4-i \\ c-b=7+i \\ -c=-4 \end{cases}$ أي $\begin{cases} a=1 \\ b=-3-i \\ c=4 \end{cases}$ (I) تكتب عندئذ $(z-1)\left[z^2-(3+i)z+4\right]=0$.

3) حل المعادلة (I)

$(z-1)\left[z^2-(3+i)z+4\right]=0$ تكافئ $z=1$ أو $z^2-(3+i)z+4=0$.

$z^2-(3+i)z+4=0$ هي المعادلة (II) السابقة ، حلول (I) هي إذن $2+2i$ ، $1-i$ و 1.

لدينا $|2+2i|=\sqrt{8}$ ، $|1-i|=\sqrt{2}$ ، $|1|=1$ إذن $|1|<|2+2i|<|1-i|$ ، نستنتج أن $z_1=1$ ، $z_2=1-i$ ، $z_3=2+2i$.

4) نضع $z_A=z_1=1$ ، $z_B=z_2=1-i$ ، $z_C=z_3=2+2i$.

(1-4) تعيين **G** :

نسمي z_G لاحقة G ، $z_G=\dfrac{z_A-2z_B-z_C}{-2}=\dfrac{3}{2}$.

(2-4) حساب GA ، GB ، GC:

$GA=|z_A-z_G|=\dfrac{1}{2}$ ، $GB=|z_B-z_G|=\dfrac{\sqrt{5}}{2}$ ، $GC=|z_B-z_G|=\dfrac{\sqrt{17}}{2}$.

(3-4) تعيين المجموعة (Γ):

$M\in(\Gamma)$ تكافئ $\overrightarrow{MA}^2-2\overrightarrow{MB}^2-\overrightarrow{MC}^2=-\dfrac{17}{2}$

أي $\left(\overrightarrow{MG}+\overrightarrow{GA}\right)^2-2\left(\overrightarrow{MG}+\overrightarrow{GB}\right)^2-\left(\overrightarrow{MG}+\overrightarrow{GC}\right)^2=-\dfrac{17}{2}$

أي $-2\overrightarrow{MG}^2+\overrightarrow{GA}^2-2\overrightarrow{GB}^2-\overrightarrow{GC}^2+2\overrightarrow{MG}\left(\overrightarrow{GA}-2\overrightarrow{GB}-\overrightarrow{GC}\right)=-\dfrac{17}{2}$

G هي مرجح الجملة $\{(A;1),(B;-2),(C;-1)\}$ إذن $\overrightarrow{GA}-2\overrightarrow{GB}-\overrightarrow{GC}=\vec{0}$.

إذن $M\in(\Gamma)$ تكافئ $-2\overrightarrow{MG}^2+\overrightarrow{GA}^2-2\overrightarrow{GB}^2-\overrightarrow{GC}^2=-\dfrac{17}{2}$

أي $-2\overrightarrow{MG}^2+\dfrac{1}{4}-\dfrac{10}{4}-\dfrac{17}{4}=-\dfrac{17}{2}$ (حسب السؤال (4-2)) إذن $MG=1$.

(Γ) هي الدائرة التي مركزها $G\left(\dfrac{3}{2};0\right)$ و نصف قطرها 1 ، إذن معادلتها

$\left(x-\dfrac{3}{2}\right)^2+y^2=1$.

التمرين 02

1) كتابة z' على شكله الجبري

$(x;y)$ إحداثيا M إذن $z=x+iy$.

$$z'=\frac{x-3+iy}{x+i(y-2)}=\frac{[(x-3)+iy][x-i(y-2)]}{x^2+(y-2)^2}=\frac{x^2+y^2-3x-2y+i(2x+3y-6)}{x^2+(y-2)^2}$$

أي $z'=\dfrac{x^2+y^2-3x-2y}{x^2+(y-2)^2}+i\dfrac{2x+3y-6}{x^2+(y-2)^2}$

2) المجموعة (D)

يكون z' حقيقيا إذا و فقط إذا كان $\dfrac{2x+3y-6}{x^2+(y-2)^2}=0$ أي $\begin{cases}2x+3y-6=0\\ x^2+(y-2)^2\neq 0\end{cases}$

أي $\begin{cases}2x+3y-6=0\\ (x;y)\neq(0;2)\end{cases}$.

المستقيم الذي معادلته $2x+3y-6=0$ يقطع محور الفواصل في النقطة $A(3;0)$ و محور التراتيب في النقطة $B(0;2)$.

(D) هو المستقيم (AB) المنقوص بالنقطة B التي لاحقتها $2i$.

3) المجموعة (Γ)

يكون z' تخيليا صرفا إذا و فقط إذا كان $\dfrac{x^2+y^2-3x-2y}{x^2+(y-2)^2}=0$ أي $\begin{cases}x^2+y^2-3x-2y=0\\ x^2+(y-2)^2\neq 0\end{cases}$

أي $\begin{cases}x^2+y^2-3x-2y=0\\ (x;y)\neq(0;2)\end{cases}$ إذن $\begin{cases}\left(x-\dfrac{3}{2}\right)^2+(y-1)^2=\dfrac{13}{14}\\ (x;y)\neq(0;2)\end{cases}$

(Γ) هي الدائرة التي مركزها $\Omega\left(\dfrac{3}{2};1\right)$ و نصف قطرها $\sqrt{\dfrac{13}{14}}$ منقوصة بالنقطة B التي لاحقتها $2i$.

((Γ) هي الدائرة التي قطرها $[AB]$ ماعدا النقطة B).

4) التفسير الهندسي لـ: $|z'|$ و $Arg(z')$

M، A و B هي على الترتيب صوّر z، 3 و $2i$ ؛ إذن لاحقة $\overrightarrow{AM}$ هي $z-3$ و لاحقة $\overrightarrow{BM}$ هي $z-2i$. نستنتج:

- $|z'|=\dfrac{AM}{BM}$
- $Arg(z')=Arg\left(\dfrac{z-3}{(z-2i)}\right)=Arg(z-3)-Argz(z-2i)$ إذن

$$Arg(z')=\left(\vec{i};\overrightarrow{AM}\right)-\left(\vec{i};\overrightarrow{BM}\right)=\left(\overrightarrow{BM};\overrightarrow{AM}\right)=\left(\overrightarrow{MB};\overrightarrow{MA}\right)$$

استنتاج نتيجة السؤال 1) : يكون z' حقيقيا إذا و فقط إذا كان $Arg(z') = k\pi$ **et** $k \in \mathbb{Z}$ **أي** $\left(\overrightarrow{MB};\overrightarrow{MA}\right) = k\pi$ و $k \in \mathbb{Z}$ ؛ إذن M تنتمي إلى المستقيم (AB) المنقوص بالنقطة B.

استنتاج نتيجة السؤال 2) : يكون z' تخيليا صرفا إذا و فقط إذا كان $Arg(z') = k\frac{\pi}{2}$ و $k \in \mathbb{Z}$ أي $\left(\overrightarrow{MB};\overrightarrow{MA}\right) = k\frac{\pi}{2}$ و $k \in \mathbb{Z}$ ؛ إذن M تنتمي إلى الدائرة التي قطرها $[AB]$ ماعدا النقطة B).

التمرين 03

من أجل كل عدد طبيعي n، $U_n = \left(\frac{1}{2}\right)^n$ **و** $V_n = n\frac{\pi}{3}$ **و** $z_n = U_n\, e^{iV_n} = U_n\left(\cos V_n + i\sin V_n\right)$

أي $z_n = \left(\frac{1}{2}\right)^n\left(\cos\frac{n\pi}{3} + i\sin\frac{n\pi}{3}\right)$.

1) $z_n \in \mathbb{R}$ إذا و فقط إذا كان $\sin\frac{n\pi}{3} = 0$ أي $\begin{cases}\frac{n\pi}{3} = k\pi \\ k \in \mathbb{Z}\end{cases}$ أي $\begin{cases}n = 3k \\ k \in \mathbb{Z}\end{cases}$

إذن $z_n \in \mathbb{R}$ يكافئ n مضاعف 3.

2) لاحقة M_0 هي $z_0 = 1$.

لاحقة M_1 هي $z_1 = \frac{1}{2}\left(\cos\frac{\pi}{3} + i\sin\frac{\pi}{3}\right) = \frac{1}{4} + i\frac{\sqrt{3}}{4}$.

لاحقة M_2 هي $z_2 = \left(\frac{1}{2}\right)^2\left(\cos\frac{2\pi}{3} + i\sin\frac{2\pi}{3}\right) = -\frac{1}{8} + i\frac{\sqrt{3}}{8}$.

لاحقة M_3 هي $z_3 = \left(\frac{1}{2}\right)^3\left(\cos\pi + i\sin\pi\right) = -\frac{1}{8}$

لاحقة M_4 هي $z_4 = \left(\frac{1}{2}\right)^4\left(\cos\frac{4\pi}{3} + i\sin\frac{4\pi}{3}\right) = -\frac{1}{32} + i\frac{\sqrt{3}}{32}$.

(3

- $OM_n = |z_n| = u_n$ و $OM_{n+1} = |z_{n+1}| = U_{n+1} = \frac{1}{2}U_n$
- $M_nM_{n+1} = |z_{n+1} - z_n| = \left|U_{n+1}\, e^{iV_{n+1}} - U_n\, e^{iV_n}\right|$

مع $U_{n+1} = \frac{1}{2}U_n$ و $V_{n+1} = V_n + \frac{\pi}{3}$ إذن $M_nM_{n+1} = \left|\frac{1}{2}U_n\, e^{i\left(V_n + \frac{\pi}{3}\right)} - U_n\, e^{iV_n}\right|$

$$M_nM_{n+1}=\left|U_n\ e^{iV_n}\left(\frac{1}{2}e^{i\frac{\pi}{3}-}-1\right)\right|=U_n\ \times\left|e^{iV_n}\right|\times\left|\frac{1}{2}e^{i\frac{\pi}{3}-}-1\right|$$

$\left|e^{iV_n}\right|=1$ لأن $M_nM_{n+1}=U_n\left|\frac{1}{2}e^{i\frac{\pi}{3}-}-1\right|$

بماأن $\frac{1}{2}e^{i\frac{\pi}{3}-}-1=\frac{1}{2}\left(\cos\frac{\pi}{3}+i\sin\frac{\pi}{3}\right)-1=-\frac{3}{4}+i\frac{\sqrt{3}}{4}$

فإن $M_nM_{n+1}=U_n\sqrt{\frac{9}{16}+\frac{3}{16}}$ أي $M_nM_{n+1}=U_n\ \frac{\sqrt{3}}{2}$

- نلاحظ أن $OM_n{}^2=OM_{n+1}{}^2+M_nM_{n+1}{}^2$، إذن OM_nM_{n+1} مثلث قائم في M_{n+1}.

4) من أجل كل عدد طبيعي n، $\alpha_n=\left|z_{n+1}-z_n\right|$.

$\alpha_n=M_nM_{n+1}$ إذن $\alpha_n=U_n\ \frac{\sqrt{3}}{2}$.

بماأن $\alpha_{n+1}=U_{n+1}\ \frac{\sqrt{3}}{2}=\frac{1}{2}\times U_n\ \frac{\sqrt{3}}{2}=\frac{1}{2}\alpha_n$ ثإن (α_n) متتالية هندسية أساسها $\frac{1}{2}$ و حدها الأول $\alpha_0=U_0\ \frac{\sqrt{3}}{2}=\frac{\sqrt{3}}{2}$.

الأساس $\frac{1}{2}$ ينتمي إلى $]-1;1[$ إذن $\lim\limits_{n\to+\infty}(a_n)=0$.

التمرين 04

الجزء الأول

1) $2^3+2(2)^2-16=0$ إذن 2 حل للمعادلة (I).

بماأن 2 حل لـ: $P(z)=z^3+2z^2-16$ فإنه يمكن تحليل $P(z)$:

$P(z)=(z-2)\left(az^2+bz+c\right)$

و $=z^3+2z^2-16=(z-2)\left(az^2+bz+c\right)$ يكتب أيضا :

$z^3+2z^2-1=az^3+(b-2a)z^2+(c-2b)z-2c......(*)$.

تكون المساواة $(*)$ محققة من أجل كل عدد مركب z إذا و فقط إذا كان :

$\begin{cases}a=1\\b-2a=2\\c-2b=0\\-2c=-16\end{cases}$ أي $\begin{cases}a=1\\b=4\\c=8\end{cases}$ (I) تكتب عندئذ $(z-2)\left(z^2+4z+8\right)=0$.

(2

أ) حل المعادلة (I)

$(z-2)\left(z^2+4z+8\right)=0$ تكافئ $z=2$ أو $z^2+4z+8=0$.

مميز z^2+4z+8 هو $\Delta=-16$ أي $\Delta=4i^2$. المعادلة $z^2+4z+8=0$ تقبل حلين $-2+2i$ و $-2-2i$.

المعادلة (I) تقبل ثلاثة حلول : 2 ; $-2+2i$; $-2-2i$.

ب) الشكل ألأسي

- $2=2e^{i2\pi}$
- $|-2+2i|=2\sqrt{2}$

$-2+2i=2\sqrt{2}\left(-\frac{1}{\sqrt{2}}+\frac{1}{\sqrt{2}}i\right)=2\sqrt{2}\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}+\frac{\sqrt{2}}{2}i\right)$ إذن $Arg(-2+2i)\equiv\frac{3\pi}{4}[2\pi]$

$-2+2i=2\sqrt{2}\ e^{i\frac{3\pi}{4}}$.

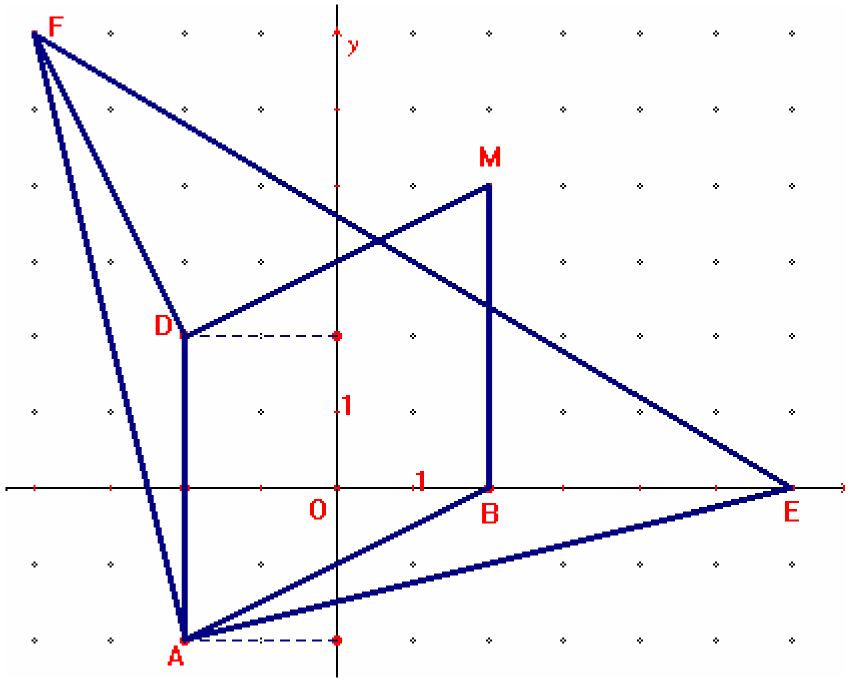
- $|-2-2i|=2\sqrt{2}$

$-2-2i=2\sqrt{2}\left(-\frac{1}{\sqrt{2}}-\frac{1}{\sqrt{2}}i\right)=2\sqrt{2}\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}-\frac{\sqrt{2}}{2}i\right)$ إذن $Arg(-2-2i)\equiv\frac{5\pi}{4}[2\pi]$

$-2+2i=2\sqrt{2}\ e^{i\frac{5\pi}{4}}$

الجزء الثاني

1) و 2) $ABMD$ متوازي أضلاع يكافئ $\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{DM}$ أي $z_M-z_D=z_B-z_A$ أي $z_M=(-2+2i)+2-(-2-2i)$ إذن $z_M=2+4i$.



(1-3) (3

• E هي صورة M بالدوران الذي مركزه B و زاويته $-\frac{\pi}{2}$ إذن

$z_E - z_B = e^{-i\frac{\pi}{2}}(z_M - z_B)$ أي $z_E = 2 - i(2+4i-2)$ أي $z_E = 6$.

• F هي صورة M بالدوران الذي مركزه D و زاويته $\frac{\pi}{2}$ إذن $z_F - z_D = e^{i\frac{\pi}{2}}(z_M - z_D)$

أي $z_F = -2+2i+i(2+4i+2-2i)$ أي $z_F = -4+6i$.

(2-3) انظر الشكل السابق

4) $\frac{z_F - z_A}{z_E - z_A} = \frac{-4+6i+2+2i}{6+2+2i} = \frac{-2+8i}{8+2i} = \frac{i(8+2i)}{8+2i} = i$

إذن $z_F - z_A = i(z_E - z_A)$ أي $z_F - z_A = e^{i\frac{\pi}{2}}(z_E - z_A)$ و هذا يبيّن أن F هي صورة E بالدوران الذي مركزه A و زاويته $\frac{\pi}{2}$، نستنتج أن المثلث AEF قائم في A و متقايس الساقين.

5) المثلث AEF قائم في A و متقايس الساقين ، إذن $IF = IE = IA$ و

$(\overrightarrow{IA}, \overrightarrow{IF}) \equiv (\overrightarrow{IE}, \overrightarrow{IA}) \equiv -\frac{\pi}{2}[2\pi]$

نسمي r الدوران الذي مركزه I و زاويته $-\frac{\pi}{2}$، لدينا $r(A) = F$ و $r(E) = A$.

لاحقة I هي $z_I = \frac{1}{2}(z_E + z_F)$ أي $z_I = 1+3i$.

صورة النقطة B بالدوران r هي النقطة B' التي لاحقتها $z_{B'}$ حيث $z_{B'} - z_I = e^{-i\frac{\pi}{2}}(z_B - z_I)$

أي $z_{B'} = 1+3i - i(2-1-3i) = -2+3i$ أي $z_{B'} = -2+3i$.

إذن $r(B) = D$. صورة المثلث EBA بالدوران r هي المثلث ADF .

التمرين 05

Q هي صورة B بالانسحاب الذي شعاعه $\vec{u}$، منه $\overrightarrow{BQ} = \vec{u}$. لدينا إذن $z_Q - z_B = -1 + \frac{5}{2}i$

أي $z_Q = \frac{3}{2} - 6i - 1 + \frac{5}{2}i$ أي $z_Q = \frac{1}{2} - \frac{7}{2}i$.

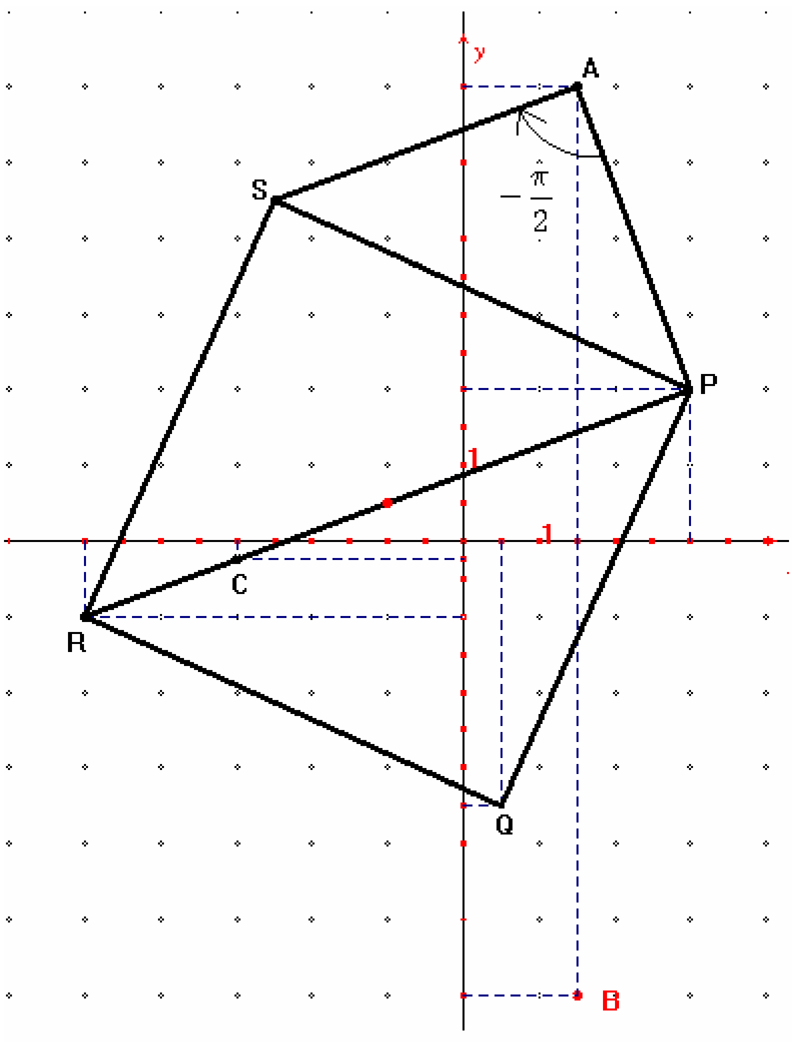
2) R هي صورة P بالتحاكي الذي مركزه C و نسبته $-\frac{1}{3}$، منه $\overrightarrow{CR} = -\frac{1}{3}\overrightarrow{CP}$. لدينا

إذن $z_R - z_C = -\frac{1}{3}(z_P - z_C)$ أي $z_R + 3 + \frac{1}{4}i = -\frac{1}{3}\left(3+2i+3+\frac{1}{4}i\right)$ أي $z_R = 5 - i$

3) S هي صورة P بالدوران الذي مركزه A و زاويته $-\frac{\pi}{2}$، منه $z_S - z_A = e^{-i\frac{\pi}{2}}(z_P - z_A)$

أي $z_S = \frac{3}{2} + 6i - i\left(3+2i-\frac{3}{2}-6i\right)$ أي $z_S = -\frac{5}{2} + \frac{9}{2}i$.

4) إنشاء النقط P ،Q ،R وS



5) لاحقة $\overrightarrow{SP}$ هي $z_P - z_S = (3+2i) - \left(-\frac{5}{2}+\frac{9}{2}i\right) = \frac{11}{2} - \frac{5}{2}i$

لاحقة $\overrightarrow{RQ}$ هي $z_Q - z_R = \left(\frac{1}{2}-\frac{7}{2}i\right) - (-5-i) = \frac{11}{2} - \frac{5}{2}i$

إذن $\overrightarrow{SP} = \overrightarrow{RQ}$ ، نستنتج أن ***PQRS*** متوازي أضلاع .

6) $\frac{z_R - z_Q}{z_P - z_Q} = \frac{-5-i-\frac{1}{2}+\frac{7}{2}i}{3+2i-\frac{1}{2}+\frac{7}{2}i} = \frac{-\frac{11}{2}+\frac{5}{2}i}{\frac{5}{2}+\frac{11}{2}i} = \frac{i\left(\frac{5}{2}+\frac{11}{2}i\right)}{\frac{5}{2}+\frac{11}{2}i} = i$

إذن $z_R - z_Q = i\left(z_P - z_Q\right)$ و منه $z_R - z_Q = e^{i\frac{\pi}{2}}\left(z_P - z_Q\right)$ ، نستنتج أن R هي صورة P بالدوران الذي مركزه Q و زاويته $\frac{\pi}{2}$.

نستنتج أن ***PQRS*** مربع.

7) النقط P، Q، R و S هي رؤوس مربع، إذن تنتمي إلى دائرة (Γ) مركزها المنتصف Ω للقطعة $[PR]$ و نصف قطرها ΩP .

$$z_\Omega = \frac{1}{2}(z_P + z_R) = -1 + \frac{1}{2}i \quad \text{و} \quad \Omega P = |z_P - z_\Omega| = \left|4 + \frac{3}{2}i\right| = \frac{1}{2}\sqrt{73}$$

(Γ) هي الدائرة التي مركزها Ω و نصف قطرها $\frac{1}{2}\sqrt{73}$.

8) لاحقة $\overrightarrow{AP}$ هي $z_P - z_A = \frac{3}{2} - 4i$ و لاحقة هي $z_P - z_R = 8 + 3i$.

إحداثيات $\overrightarrow{AP}$ و $\overrightarrow{RP}$ هي $\left(\frac{3}{2};-4\right)$ و $(8;3)$ على الترتيب و منه

$\overrightarrow{AP} \bullet \overrightarrow{RP} = \frac{3}{2}\times 8 + (-4)\times 3 = 0$ إذن $\overrightarrow{AP}$ و $\overrightarrow{RP}$ متعامدان,

المستقيم (AP) يعامد القطر $[RP]$ في P و منه (AP) مماس للدائرة (Γ) في النقطة P.

التمرين 06

كتابة c على الشكل الأسي

لدينا $|c| = \sqrt{\left(\frac{3}{2}\right)^2 + \left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2} = \sqrt{3}$ إذن $c = \sqrt{3}\left(\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}i\right)$

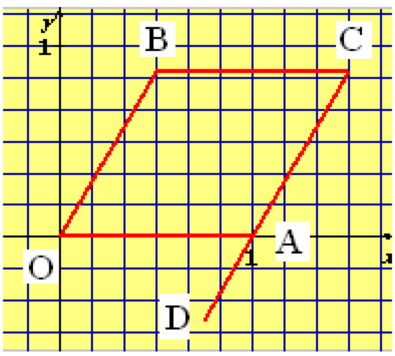
و بماأن $\cos\frac{\pi}{6} = \frac{\sqrt{3}}{2}$ و $\sin\frac{\pi}{6} = \frac{1}{2}$ فإن $c = \sqrt{3}\ e^{i\frac{\pi}{6}}$

كتابة d على الشكل الجبري

لدينا $d = \frac{\sqrt{3}}{2}\left(\cos\left(-\frac{\pi}{6}\right) + i\sin\left(-\frac{\pi}{6}\right)\right)$ **إذن** $d = \frac{\sqrt{3}}{2}\left(\cos\frac{\pi}{6} - i\sin\frac{\pi}{6}\right)$

إذن $d = \frac{\sqrt{3}}{2}\left(\frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{1}{2}i\right)$ **أي** $d = \frac{3}{4} - \frac{\sqrt{3}}{4}i$

2) $OACB$ معيّن



- لاحقة $\overrightarrow{OA}$ هي 1

لاحقة $\overrightarrow{BC}$ هي $c-b=\frac{3}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}i-\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{3}}{2}i=1$

إذن $\overrightarrow{OA}=\overrightarrow{BC}$ و منه $OACB$ متوازي أضلاع.

- لاحقة $\overrightarrow{OC}$ هي $\frac{3}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}i$ ؛ لاحقة $\overrightarrow{AB}$ هي $b-a=-\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}i$

إحداثيات $\overrightarrow{OC}$ و $\overrightarrow{AB}$ هي $\left(\frac{3}{2};\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$ و $\left(-\frac{1}{2};\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$ على الترتيب

إذن $\overrightarrow{OC}\bullet\overrightarrow{AB}=\left(\frac{3}{2}\right)\times\left(-\frac{1}{2}\right)+\frac{\sqrt{3}}{2}\times\frac{\sqrt{3}}{2}=0$ ،نستنتج أن الشعاعين $\overrightarrow{OC}$ و $\overrightarrow{AB}$ متعامدان .

القطران $[OC]$ و $[AB]$ متعامدان منه $OACB$ معين.

3) النقط D,A,C على استقامة واحدة

نسمي z_D ، z_A و z_C لواحق النقط D,A,C على الترتيب :

$$z_C=c=\frac{3}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}i \text{ ؛ } z_A=a=1 \text{ ؛ } z_D=d=\frac{3}{4}-i\frac{\sqrt{3}}{4}$$

$$\frac{z_D-z_A}{z_C-z_A}=\frac{\frac{3}{4}-i\frac{\sqrt{3}}{4}-1}{\frac{3}{2}+i\frac{\sqrt{3}}{2}-1}=-\frac{1}{2} \text{ ؛ } \frac{z_D-z_A}{z_C-z_A}\in\mathbb{R}^- \text{ إذن } Arg\left(\frac{z_D-z_A}{z_C-z_A}\right)\equiv\pi\,[2\pi]$$

و هذا يعني $\left(\overrightarrow{AC};\overrightarrow{AD}\right)\equiv\pi\,[2\pi]$ ، نستنتج أن النقط D,A,C على استقامة واحدة .

4) تعيين α و k

التشابه المباشر s الذي مركزه O ، زاويته α و نسبته k، يحوّل A إلى C إذن $c=k\;e^{i\alpha}\times a$

أي $\times 1$ $\frac{3}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}i=k\,e^{i\alpha}$ أي $\sqrt{3}\;\;e^{i\frac{\pi}{6}}=k\,e^{i\alpha}$ و منه $k=\sqrt{3}$ و $\alpha\equiv\frac{\pi}{6}[2\pi]$.

5) النقط F ، C و G على استقامة واحدة

لدينا $\begin{cases} s(D)=F \\ s(C)=G \\ s(A)=C \end{cases}$ بماأن النقط D,A,C على استقامة واحدة فإن النقط F ، C و G على استقامة واحدة لأن كل تشابه مباشر يحافظ على الإستقامية .

التمرين 07

● الشكل المباشر للتشابه المباشر هو $z' = az + b$.

$\begin{cases} s(A) = B \\ s(B) = C \end{cases}$ يعني $\begin{cases} z_B = a\,z_A + b \\ z_C = a\,z_B + b \end{cases}$ إذن $\begin{cases} 4i = a(1+i) + b \\ -4+6i = a(4i) + b \end{cases} \ldots\ldots(*)$

$(*)$ تكافئ $\begin{cases} (1+i)\,a + b = 4i \\ 4ia + b = -4+6i \end{cases}$ أي $\begin{cases} (1+i)\,a + b = 4i \\ \left[4ia+b\right] - \left[(1+i)\,a+b\right] = \left[-4+6i\right] - \left[4i\right] \end{cases}$

أي $\begin{cases} (1+i)\,a + b = 4i \\ a(-1+3i) + b = -4+2i \end{cases}$ و جد $\begin{cases} b = 2i \\ a = 1+i \end{cases}$

الجملة $(*)$ تقبل حلا وحيدا $\begin{cases} b = 2i \\ a = 1+i \end{cases}$، إذن يوجد تشابه مباشر s وحيد حيث $\begin{cases} s(A) = B \\ s(B) = C \end{cases}$.

● لدينا $|a| = \sqrt{2}$، إذن $a = \sqrt{2}\left(\dfrac{\sqrt{2}}{2} + i\dfrac{\sqrt{2}}{2}\right) = \sqrt{2}\left(\cos\dfrac{\pi}{4} + i\sin\dfrac{\pi}{4}\right)$

و $\dfrac{b}{1-a} = \dfrac{2i}{1-1-i} = -2$ ؛ نستنتج أن s هو التشابه المباشر الذي مركزه $\Omega(-2;0)$، زاويته $\dfrac{\pi}{4}$ و نسبته $\sqrt{2}$.

التمرين 08

نرمز $R(\Omega;\alpha)$ للدوران الذي مركزه Ω وزاويته α.

نرمز z_M للاحقة النقطة M .

● لدينا من جهة :

$P \xrightarrow{R\left(B;\frac{\pi}{3}\right)} C$ إذن $(1)\ldots z_C - z_B = e^{i\frac{\pi}{3}}(z_P - z_C)$

$Q \xrightarrow{R\left(C;\frac{\pi}{3}\right)} A$ إذن $(2)\ldots z_A - z_C = e^{i\frac{\pi}{3}}(z_Q - z_C)$

$R \xrightarrow{R\left(A;\frac{\pi}{3}\right)} B$ إذن $(3)\ldots z_B - z_A = e^{i\frac{\pi}{3}}(z_R - z_A)$

و عندما نجمع (1) و(2) و(3) طرف لطرف نجد $(*)\ldots z_A + z_B + z_C = z_P + z_Q + z_R$

● و من جهة أخرى :

$(4)\ \ldots z_I = \dfrac{z_A + z_C + z_Q}{3}$ و $(5)\ \ldots z_J = \dfrac{z_B + z_C + z_P}{3}$

و $(6)\ \ldots z_K = \dfrac{z_A + z_B + z_R}{3}$

عندما نجمع (4) و(5) و(6) طرف لطرف و نجد :

$$z_I + z_J + z_K = \frac{2\left(z_A + z_B + z_C\right) + \left(z_P + z_Q + z_R\right)}{3}$$

وبماأن (*) فإن $\frac{z_I + z_J + z_K}{3} = \frac{z_A + z_B + z_C}{3} = \frac{z_P + z_Q + z_R}{3}$

إذن للمثلثات ABC، PQR، IJK نفس مركز الثقل .

التمرين 09

1) $z' = x' + iy'$ و $z = x + iy$.

$$z' = x' + iy'$$
$$z' = (-x - y + 2) + i(x - y - 1)$$
$$z' = -x - y + 2 + ix - iy - 1$$
$$z' = -(x + iy) + (ix - y) + 1$$
$$z' = -(x + iy) + i(x + y) + 1$$
$$z' = (-1 + i)(x + iy) + 1$$
$$z' = (-1 + i)z + 1$$

2) z' من الشكل $az + b$ مع $\begin{cases} a = -1 + i \\ b = 1 \end{cases}$ ، مستنتج أن s هو التشابه المستوي المباشر الذي نسبته $|-1+i| = \sqrt{2}$ و زاويته α ، α عمدة لـ: $-1+i$ أي $\frac{3\pi}{4}$.

مركز التشابه المباشر s هي النقطة الصامدة الوحيدة Ω التي لاحقتها $\frac{b}{1-a}$ و

$\frac{b}{1-a} = \frac{1}{2-i} = \frac{2}{5} + i\frac{1}{5}$.

3) G هي مرجح الجملة $\{(M;1),(M';1),(M'';1)\}$

(1-3) z هي لاحقة M ، z' لاحقة M' و z'' لاحقة M'' .

لدينا $z' = (-1+i)z + 1$

و $z'' = (-1+i)z' + 1 = (-1+i)\left((-1+i)z + 1\right) + 1 = -2iz + i$

النقطة G معرفة بـ: $\overrightarrow{OG} = \overrightarrow{OM} + \overrightarrow{OM'} + \overrightarrow{OM''}$

إذن اللاحقة z_G للنقطة G هي $z_G = z + z' + z''$ إذن $z_G = -iz + 1 + i$.

(2-3) z_G من الشكل $a'z + b'$ مع $\begin{cases} a' = -i \\ b' = 1 + i \end{cases}$ ، نستنتج أن g هو التشابه المباشر الذي نسبته $|-i| = 1$ إذن g دوران .

مركز الدوران g هي النقطة التي لاحقتها $\frac{b'}{1-a'}$ أي $\frac{1+i}{1+i} = 1$.

(3-3) $g(M_0)=O$ يكافئ $0=-iz+1+i$

يكافئ $iz=1+i$

يكافئ $z=1-i$

لاحقة M_0 هي : $z_{M_0'}=1-i$

$s(M_0)=M_0'$ مع $z_{M_0'}=(-1+i)(1-i)+1=1+2i$

$s\circ s(M_0)=M_0''$ مع $z_{M_0''}=-2i(1-i)+i=-i-2$